מרצה: עוזי חרוש   מייל: uziharush@gmail.com

לינארית - תרגול 7

תזכורת

$$Sp\{v_1,\dots,v_n\} = \{\text{אוסף כל הצ"ל של } v_1,\dots,v_n\}$$

תלות / אי תלות.

הגדרה: יהי V מ"ו ו- $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ וקטורים ב- V

1. נאמר ש- B תלויה לינארית (ת"ל) אם קיים צ"ל <u>לא</u> טריוויאלי שנותן את וקטור ה- 0 כלומר

$$\exists \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{F};\quad \alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n=0$$

כך שלפחות אחד מ- $0\neq\alpha_i$

2. (הפוך) נאמר ש- B בת"ל (בלתי תלויה לינארית) אם רק הטריוויאלי הוא <u>היחיד</u> שנותן את וקטור ה- 0 כלומר

$$\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n=0$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$$

תרגיל: הוכח $B=\{x^3-x+1,\ 2x^2+x-1,\ x^3-1\}$

כי קבוצה בת"ל בתוך $V=\mathbb{R}_3[x]$

פתרון: יהיו $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כך ש-

$$\alpha_1(x^3-x+1)+\alpha_2(2x^2+x-1)+\alpha_3(x^3-1)=0$$

$\downarrow$ הוכח צ"ל ש- $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

$\forall x$

$$(\alpha_1+\alpha_3)x^3+(+2\alpha_2)x^2+(-\alpha_1+\alpha_2)x+(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)1=0$$

$\Downarrow$

x^3	$\alpha_1+\alpha_3=0$	$\longrightarrow \alpha_3=0$
x^2	$2\alpha_2=0$	$\rightarrow \alpha_2=0$
x	$-\alpha_1+\alpha_2=0$	$\rightarrow \alpha_1=0$
1	$\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0$	

כלומר הפתרון יחיד הוא [illegible] $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

לכן קבוצה B היא בת"ל

[illegible]: מה לגבי $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

ב- $\mathbb{R}^3$

פתרון: י'ן $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כך ש-

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

נחפש $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ שמקיימות את זה

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$
$$2\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_3 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\2 & -3 & -1 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \to \dots \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

קיימים אינסוף פתרונות דרגת חופש

פתרון שאינו טריוויאלי למשל

$$\alpha_3 = 1$$
$$\alpha_2 = -1$$
$$\alpha_1 = -1$$

סכום

$$-1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

תרגיל: הוכיחו:

$v_1,\dots,v_n\in V$ ת"ל $\iff$ אחד מהווקטורים הוא צ"ל של האחרים.

פתרון:

$(\Leftarrow)$ נניח $v_1,\dots,v_n$ ת"ל לכן קיים צ"ל לא טריוויאלי

$$\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=0$$

כאשר קיים $\alpha_k\neq 0$

$$\alpha_kv_k=-\alpha_1v_1-\dots-\alpha_{k-1}v_{k-1}-\alpha_{k+1}v_{k+1}-\dots-\alpha_nv_n \;/\;\alpha_k^{-1}$$ לכן

$$v_k=\sum_{k\neq i=1}^{n}-\alpha_i\cdot\alpha_k^{-1}v_i \Rightarrow$$ צ"ל של האחרים.

$(\Rightarrow)$ נניח ש- v_k הוא צ"ל של האחרים כלומר

$$v_k=\sum_{k\neq i=1}^{n}\beta_iv_i$$

$$\Downarrow$$

$$0=\beta_1v_1+\beta_2v_2+\dots+\beta_{k-1}v_{k-1}-v_k+\beta_{k+1}v_{k+1}+\dots+\beta_nv_n$$

זה צ"ל לא טריוויאלי כי המקדם של v_k שווה ל- -1 (כלומר שונה מ-0)

$\binom{1}{0}\binom{2}{3}$ כי $1\cdot\binom{1}{0}+8\binom{2}{3}=\binom{17}{24}$

תרגיל: יהי $\mathbb{F}^n$ ושו ו- $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מט' ריבועית

הוכיחו:

A הפיכה $\iff$ (לכל $v_1,\dots,v_m \in \mathbb{F}^n$ בת"ל מתקיים כי $Av_1,\dots,Av_m \in \mathbb{F}^n$ גם הם בת"ל)

פתרון: $(\Leftarrow)$ יהיו $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in \mathbb{F}^n$ כך ש-

$$\alpha_1(Av_1)+\alpha_2(Av_2)+\dots+\alpha_m(Av_m)=0$$

$$\Downarrow$$

$$A(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_m v_m)=0 \quad / A^{-1}$$

A הפיכה

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_m v_m=\underbrace{A^{-1}0}_{0}$$

$\{v_1,\dots,v_m\}$ בת"ל

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_m=0$$

$(\Rightarrow)$

$(\not\Leftarrow)$ נ.ב. A לא הפיכה, נראה שקיימת קבוצה $v_1,\dots,v_m \in \mathbb{F}^n$ בת"ל ש- $Av_1,\dots,Av_m \in \mathbb{F}$ ת"ל

A לא הפיכה לכן קיים $v \neq 0$ כך ש-

$$Av=0$$

$(m=1)$

אזי הוקטור $\{v\}$ הוא בת"ל (כי מורכב מוקטור שונה מ-0)

אבל $Av=0$ הוא ת"ל

משפט: A הפיכה ⟺ לכל b
למערכת $Ax=b$ $\quad x=A^{-1}b$
קיים פתרון יחיד.

A הפיכה ⟺ למערכת $Ax=0$ קיים פתרון יחיד

A לא הפיכה ⟺ למערכת $Ax=0$ לא קיים פתרון יחיד

בסיס ומימד

הגדרה: יהי V מ"ו ו- $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ קבוצה של וקטורים כך ש-

1. B בת"ל
2. B פורשת ($Sp(B)=V$)

אז נאמר ש- B בסיס ל- V

והמימד של V $\dim(V)=|B|$

מספר איברים בבסיס.

דוגמאות לבסיסים סטנדרטיים;

1. $\mathbb{F}^n$;

$$B=\left\{\underset{e_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}},\underset{e_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}},\underset{e_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}},\dots,\underset{e_n}{\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}}\right\}$$

למשל עבור $\mathbb{R}^3$ ניקח

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

בת"ל;

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right).$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\alpha=\beta=\gamma=0}$$

פורשת; $\mathbb{R}^3=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

($\supseteq$) ברור שב"ל שייכים ל- $\mathbb{R}^3$ ולכן $\mathbb{R}^3\supseteq Sp(B)$

($\subseteq$) יהי $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ צריך למצוא לו

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

ניקח $\alpha=x$, $\beta=y$, $\gamma=z$.

לכן היא גם פורשת ומכאן B בסיס.

(2) $V=\mathbb{F}^{n\times m}$ אז

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\ \vdots&&&\\ 0&\cdots&&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&&&0\\ \vdots&&&&\\ 0&\cdots&&&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&&&&0\\ \vdots&&&&&\\ 0&\cdots&&&&0\end{pmatrix},\dots\right\}$$

$$\{E_{11},\ E_{12},\ E_{13},\ \dots,\ E_{nm}\}$$

למשל עבור $V=\mathbb{R}^{2\times 3}$

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

והמימד הוא $2\times3=6$ ובמקרה הכללי הוא $n\cdot m$

---

(3) $V=\mathbb{F}_n[x]$ כבסיס סטנדרטי הוא

$=\{a_0+a_1x+\dots+a_nx^n \mid a_i\in\mathbb{F}\}$

$B=\{1,x,x^2,x^3,\dots x^n\}$

למשל עבור $\mathbb{F}_2[x]$ הבסיס הסטנדרטי הוא

$B=\{1,x,x^2\}$

בת"ל:

$$\alpha\cdot1+\beta\cdot x+\gamma x^2=0$$

$$\alpha=\beta=\gamma=0$$

אכן בת"ל

כמו כן המימד של $\mathbb{F}_2[x]$ הוא 3

ובכללי

$$\dim(\mathbb{F}_n[x])=n+1$$

(4) $V=\{0\}$ $\Leftarrow$ הבסיס הוא ϕ

והממד הוא 0.

תרגיל: יהי V מ"ו ו- $B = \{v_1,...,v_n\}$ בסיס ל- V

אזי לכל $v\in V$ קיים צ"ל יחיד של איברי B שיוצר את v

כלומר

$$\forall v\in V\ \ \exists!\ \alpha_1,...,\alpha_n\in F\ ,\ v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$$

(יחיד)

פתרון: כוונית נוכיח שקיים צ"ל של B שיוצר את v;

B בסיס לכן B פורש את V כלומר

$V=sp\,B$

משמע לכל $v\in V$ מתקיים $v\in sp\,B$

כלומר v הוא צ"ל של איברי B.

נניח שיש שני צ"ל השווים ל- v כלומר

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+...+\alpha_n v_n = v = \beta_1 v_1+\beta_2 v_2+...+\beta_n v_n$$

$$(\alpha_1-\beta_1)v_1+(\alpha_2-\beta_2)v_2+...+(\alpha_n-\beta_n)v_n=0$$

$\Downarrow$ $\{v_1,...,v_n\}$

בסיס לכן בת"ל

$$\forall 1\le i\le n\ ,\ \alpha_i-\beta_i=0$$

$$\alpha_i=\beta_i$$

ומאחר ויש רק שני צ"ל שווים לכן הצ"ל הוא יחיד.

משפט שלישי חינם

יהי V מ"ו ו- $S \subseteq V$ קבוצת וקטורים

אז אם מתקיימים 2 מתוך 3 התכונות הבאות

אז גם השלישית מתקיימת ו- S יהיה בסיס.

1. S בת"ל
2. S פורשת, $sp(S)=V$
3. $dim(V)=|S|$

תרגיל: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ו- $W \leq V$ תת מרחב של V

כך ש- $dim(V)=dim(W)=n$

הוכיחו ש- $W=V$

פתרון: יהי $B=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס ל- W נרצה

להוכיח ש- B בסיס גם ל- V.

B בסיס ל- W לכן היא מקיימת

1. B בת"ל
2. B פורשת את W ($sp(B)=W$)

מספר הוקטורים ב- B הוא n, שזה שווה למימד

של V (נתון ש- $dim(V)=dim(W)$)

$|B|=dim V$ *

בנוסף יודע ש- B בת״ל

לכן לפי 2 מ-3 הוכחנו (dim הממד V)

נקבל ש- B בסיס של V לכן

$W \; ; \; Sp\, B \; \underset{\downarrow}{=} \; V$

B פורשת את W

B פורשת את V

משמע $\boxed{W=V}$

תרגיל; הוכיחו שאם $A \in F^{5\times5}$

הקבוצה $B=\{I, A, A^2, \dots, A^{25}\}$

ת״ל במרחב $V = F^{5\times5}$

פתרון: $|B|=26$

אבל $\dim(V)=5\cdot5=25$

$\boxed{\text{אם } |B|>\dim V \text{ אז } B \text{ ת״ל}}$

$\boxed{\text{אם } |B|<\dim V \text{ אז } B \text{ לא פורש}}$