שאלון בחינה בקורס: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 (89-218)
סמסטר ב; מועד א. תשע"ב
שם המרצה: ד"ר שחר נבו.
משך הבחינה $2\frac{3}{4}$ שעות.

<u>ללא חומר עזר, דף נוסחאות מצורף</u>

<u>ענה על 5 מתוך 6 השאלות הבאות. נמק תשובותיך.</u>

1. א. בדוק התכנסות והתכנסות בהחלט של הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$. (10)

ב. $\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. (10)

2. א. האם המשוואה $e^{xy}+(x-1)^2+y=1$ מגדירה את y כפונקציה של x בסביבת $(1,0)$?
אם כן מצא את $h'(1)$. (10)

ב. מצא f''_{xy} באשר $f(x,y)=e^{xy}\sin x-\cos xy$. (10)

3. א. עבור אילו ערכי x מתכנס הטור $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{nx}$. מצא סכום הטור עבור ערכי x הנ"ל. (11)

ב. השטח שבין גרף הפונקציה $f(x)=\frac{e^x}{x}$, $1\le x\le 2$ לבין ציר x מסתובב סביב ציר y. מצא נפח גוף הסיבוב שנוצר. (9)

4. א. חשב $\int x^3\ln x dx$. (10)

ב. הצג $f(x)=\cos^2 x$ כטור חזקות אינסופי לכל x. (10)

5. מצא את כל הפתרונות של המד"ר $y'+2xy=x$ ומצא פתרון המקיים $y(1)=2$.

6. א. מצא את כל הפתרונות הממשיים של המערכת $\begin{cases} y_1'=-y_2 \\ y_2'=9y_1 \end{cases}$. (12)

ב. חשב את e^A עבור $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. (8)

<u>בהצלחה!</u>

פתרון המבחן

שאלה 1

ב. $\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ נציב $t=\arcsin x$, $dt=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ נקבל $\int_{-\pi/6}^{\pi/6}tdt=\left[\frac{t^2}{2}\right]=0$.

שאלה 2

ב. מצא f''_{xy} באשר $f(x,y)=e^{xy}\sin x-\cos xy$.

$$f'_x=ye^{xy}\sin x+e^{xy}\cos x+y\sin xy$$
$$f''_{xy}=e^{xy}\sin x+xye^{xy}\sin x+xe^{xy}\cos x+\sin xy+xy\sin xy$$.

שאלה 3

א. נשתמש במבחן השורש. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{ne^{nx}}=e^x$ ולכן הטור מתכנס כאשר $e^x<1$ ז"א $x<0$.

עבור $x=0$ נקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}n$ שהוא טור מתבדר ולכן הטור מתכנס אם ורק אם $x<0$.

נסמן $a_n=e^{nx}$ היא סדרה הנסית שהאיבר הראשון שלה הוא e^x ומנת הסדרה e^x .

לכן מספיק לחשב את $f(x)$ ולגזור.

נקבל שהסכום הוא $f(x)=\frac{e^x}{1-e^x}\Leftarrow f'(x)=\frac{e^x\cdot(1-e^x)+e^{2x}}{(1-e^x)^2}\Leftarrow f'(x)=\frac{e^x}{(1-e^x)^2}$

ב. השטח שבין גרף הפונקציה $f(x)=\frac{e^x}{x}$, $1\le x\le 2$ לבין ציר x מסתובב סביב ציר y . מצא נפח גוף הסיבוב שנוצר.

הנפח המתקבל הוא $2\pi\int_1^2 x\cdot\frac{e^x}{x}dx=2\pi\int_1^2 e^x dx=2\pi e^2-2\pi e$.

שאלה 4

א. חשב $\int x^3\ln xdx$.

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$u=\ln x$ $\quad v=\frac{x^4}{4}$

$u'=\frac{1}{x}$ $\quad v'=x^3$

$$\int x^3\ln xdx=\frac{x^4\ln x}{4}-\int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^4\ln x}{4}-\int\frac{x^3}{4}dx=\frac{x^4\ln x}{4}-\frac{x^4}{16}$$.

ב. הצג $f(x)=\cos^2 x$ כטור חזקות אינסופי לכל x .

נשים לב ש $\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)$.

טור טיילור של $\cos x$ הוא $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ ולכן $\cos 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}$ סה"כ נקבל ש

.

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$$

שאלה 5

מצא את כל הפתרונות של המד"ר $y'+2xy = x$ ומצא פתרון המקיים $y(1) = 2$.

נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית $y'+2xy = 0$ ונקבל $y = ce^{-\int 2xdx} \Leftarrow y = ce^{-x^2}$.

הפתרון הפרטי של הלא הומוגני הוא $y = \frac{1}{2}$ ולכן הפתרון הכללי הוא $y = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$.

נתון ש $y(1) = 2$ ולכן $2 = ce^{-1} + \frac{1}{2} \Leftarrow c = \frac{3e}{2}$ והפתרון הוא $y = \frac{3e^{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}$.

שאלה 6

א. מצא את כל הפתרונות הממשיים של המערכת $\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = 9y_1 \end{cases}$.

$$\left|\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -9 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3i .$$

עבור $\lambda = 3i$ נקבל את הוקטור העצמי $\begin{pmatrix} 1 \\ -3i \end{pmatrix}$.

ואז הפתרון הוא מהצורה

$$\begin{matrix} y_1 = \cos 3x + i \sin 3x \\ y_2 = -3i\cos 3x + 3\sin 3x \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x \\ y_2 = 3c_1 \sin 3x - 3c_2 \cos 3x \end{matrix}$$

ב. חשב את e^A עבור $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

$$e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} , \quad e^{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

המטריצות $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ מתחלפות ז"א $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

ולכן

$$e^A = e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 2e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} .$$