תרגול 1 איפי 3 תיכוניסטים

מבוא:

בקורסים אינפי 1, 2 דיברנו על פונקציות במשתנה אחד, כלומר פונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (מהישר הממשי לעצמו).

באינפי 3 המטרה היא להכליל את הכל התיאוריה הזאת לפונקציות בכמה משתנים, כלומר פונקציות $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.

רוב הדוגמאות שנראה בקורס שלנו יהיו עבור הפונקציות: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

תזכורת:

מרחב $\mathbb{R}^n$ הוא אוסף של כל ה-nיות הסדורות של מספרים ממשיים, כלומר

$$\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,....,x_n)\,|\forall i:x_i\in\mathbb{R}\}$$

כפי שזכור לכם מקורס בלינארית, $\mathbb{R}^n$ הוא מרחב לינארי מעל $\mathbb{R}$ עם שתי פעולות שמוגדרות אליו:

חיבור: לכל $x=(x_1,....,x_n)$, $y=(y_1,...,y_n)$ מתקיים $x+y=(x_1+y_1,....,x_n+y_n)$

כפל בסקלר: לכל $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים: $\alpha x=(\alpha x_1,...,\alpha x_n)$

האיברים שלו נקראים וקטורים, וכמובן מתקיימות בו כל האקסיומות של מרחב וקטורי.

הבסיס הסטנדרטי עבור $\mathbb{R}^n$ הוא : $S=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ כאשר $e_i=(0,0,...,1,0,....,0)$

כדי שנוכל לקבל את כל המבנה של $\mathbb{R}^n$, שכולל את המרחקים, זוויות ואורטוגונאליות, אנחנו צריכים להגדיר אליו את המושג של מכפלה פנימית.

כזכור, מכפלה פנימית מעל מרחב וקטורי V, היא פונקציה $V\times V\to\mathbb{R}$, שמתאימה לכל זוג וקטורים x,y את המספר $\langle x,y\rangle$ ומקיימת את התנאים הבאים:

1) $\langle x,x\rangle>0$ לכל $x\neq 0$ (פוזיטיביות)

2) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$ (סימטריות)

3) $\langle \alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$

לדוגמה: מכפלה פנימית סטנדרטית (או בשם אחר מפלה סקלרית) מוגדרת באופן הבא: $x\cdot y=x_1y_1+......+x_ny_n$

הגדרה נוספת: $x\cdot y=\|u\|\cdot\|v\|\cdot cos(\theta)$

שתי ההגדרות ביחד עוזרות לנו לחשב את הזווית בין שני הוקטורים באמצעות הנוסחה הבאה:

$$cos(\theta)=\frac{x\cdot y}{\|x\|\cdot\|y\|}$$

לדוגמה:

נתונים שני וקטורים: $a=(2,3,-1)$, $b=\left(0,4,\frac{1}{2}\right)$
כדי למצוא את הזווית בין שני הוקטורים נחשב קודם את המכפלה הסקלרית שלהם:
$a\cdot b=2\cdot 2+4\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot(-1)=11.5$
$\|a\|=\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$
$\|b\|=\sqrt{4^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{65}}{2}$
ולכן נקבל:

$$cos(\theta)=\frac{11.5}{\sqrt{14}\cdot\frac{\sqrt{65}}{2}}$$

$arccos$ נותן לנו בקירוב 40.32 מעלות או 0.7037 רדיאנים
הגדרה (נורמה):
יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. הפונקציה $\|\| : V\to\mathbb{R}$ נקראת נורמה, אם היא מקיימת את התכונות הבאות:
1) אי שליליות:
א) אי שליליות: $\|u\|\geq 0$ לכל $u\in V$
ב) $u=0$ אם ורק אם $\|u\|=0$
2) הומוגניות: $\|\lambda u\|=|\lambda|\,\|u\|$ לכל $\lambda\in\mathbb{F}$ ולכל $u\in V$
3) אי שוויות המשולש: $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$ לכל $u,v\in\mathbb{F}$
מרחב שעליו מוגדרת נורמה נקרא מרחב נורמי
דוגמאות:
1) נורמה סטנדרטית על מרחב $\mathbb{R}^n$ הנקראת גם הנורמה האוקלידית:

$$\|(a_1,..,a_n)\|_2=\sqrt{a_1^2+...+a_n^2}$$

2) נורמת p:

$$\|(a_1,a_2,....,a_n)\|_p=(a_1^p+a_2^p+....+a_n^p)^{\frac{1}{p}}$$

3) נורמת אינסוף

$$\|(a_1,a_2,...,a_n)\|_\infty=max_{1\leq i\leq n}\{a_i\}$$

הערה:
נורמות $\|\|_1$, $\|\|_2$, נורמת אינסוף הן שקולות במובן הבא:
קיימים $c_{1,},c_2>0$ כך ש: $c_1\|\|_1\leq\|\|_2\leq c_2\|\|_1$ ולהיפך, כלומר אנחנו יכולים להחליף נורמה אחת בנורמה שנייה.
הגדרה:
יהי V מרחב מכפלה פנימית, הנורמה המושרית מהמכפלה הפנימית מוגדרת ע"י $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$

אינטואיטיבית, נורמה מגדירה גודל
משפט:
יהי V מרחב נורמי, הנורמה המושרית על ידי מכפלה פנימית אם ורק אם היא מקיימת את שוויון המקבילית:

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\cdot\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$$

לכל $u,v\in V$.
תרגיל:
במרחב $C\left[0,1\right]$ נגדיר

$$\|f\|_{max}=max_{x\in[0,1]}|f(x)|$$

הראו שזו נורמה. האם היא מושרית ממכפלה פנימית?
פתרון:
נראה שהפונקציה מקיימת את שלושת התכונות הנדרשות מהנורמה:
1) ברור שערך מוחלט הוא אי שלילי ולכן הפונקציה בתוך ערך מוחלט היא אי שלילית ולכן $\|f\|_{max}\geq 0$.
כעת, אם $f=0$, אכן מתקיים $\|f\|_{max}=max_{x\in[0,1]}|f|=max|0|=0$
מצד שני, אם מתקיים $\|f\|_{max}=max_{x\in[0,1]}|f|=0$ זה אומר ש-$0\leq|f|$ לכל $x\in[0,1]$ ולכן $|f|=0$ ולכן $f=0$ לכל $x\in[0,1]$.
נבדוק הומוגניות:

$$\|\lambda f\|_{max}=max_{x\in[0,1]}|\lambda f|=|\lambda|max_{x\in[0,1]}|f(x)|=|\lambda|\,\|f\|_{max}$$

אי שוויון המשולש:

$$\|f+g\|_{max}=max_{x\in[0,1]}|(f+g)(x)|=max_{x\in[0,1]}|f(x)+g(x)|=$$

$$\leq max_{x\in[0,1]}\left\{|f(x)|+|g(x)|\right\}$$

מאי שוויון של ערך מוחלט. ולכן:

$$max_{x\in[0,1]}\left\{|f(x)|+|g(x)|\right\}=max_{x\in[0,1]}|f(x)|+max_{x\in[0,1]}|g(x)|=$$

$$=\|f\|_{max}+\|g\|_{max}$$

נראה שאי שוויון המקבילית לא מתקיים:
נתבונן בפונקציות $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$
מצד אחד מתקיים: $\|f\|_{max} = \|g\|_{max} = 1$
ומצד שני, $\|f + g\|_{max} = max_{x\in[0,1]}|x + 1 - x| = 1$
$\|f - g\|_{max} = max_{x\in[0,1]}|x - (1 - x)| = max_{x\in[0,1]}|2x - 1| = 1$
ולכן:

$$\|f + g\|_{max} + \|f - g\|_{max} = 2 \neq 2 \cdot (\|f\|^2_{max} + \|g\|^2_{max}) = 4$$

ולכן הנורמה הזו אינה מושרית מהמטריקה.
אי שוויון קושי שוורץ
יהי V מרחב מכפלה פנימית, אזי לכל $u, v \in V$ מתקיים:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

כאשר הנורמה היא הנורמה המושרית מהמכפלה הפנימית
תרגיל:
הראו שבמרחבים נורמיים, הנורמה המושרית ממכפלה פנימית , אי שוויון המשולש נובע מאי שוויון קושי שוורץ.
פתרון:
$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ ולכן $2 \cdot |\langle u, v\rangle| \leq 2 \cdot (\|u\| \cdot \|v\|)$.
נוסיף לשני האגפים $\|u\|^2 + \|v\|^2$ ונקבל:
$2 \cdot |\langle u, v\rangle| + \|u\|^2 + \|v\|^2 \leq 2 \cdot (\|u\| \cdot \|v\|) + \|u\|^2 + \|v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$
כעת, לפי הגדרת הנורמה: $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u + v\rangle + \langle v, u + v\rangle =$
$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \cdot \langle v, u\rangle \leq (\|u\| + \|v\|)^2$
נוציא שורש משני האגפים ונקבל:
$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$
תרגיל:
הוכיחו את אי השוויון:

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$$

פתרון:

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2 = \sum_{i,j=1}^n |x_i||x_j| = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{1\leq i,j\leq n} |x_i||x_j| \geq \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

ואם נוציא שורש נקבל את הדרוש.

לאי שוויון השני, נסמן:

$$x = (|x_1|, ..., |x_n|)\,, y = (1, 1, ..., 1)$$

ולפי אי שוויון קושי שוורץ:

$$| < x, y > | \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

נקבל:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = | < x, y > | \leq \|x\| \cdot \|y\| = \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

ואם נחלק ב-$\sqrt{n}$ נקבל את הדרוש.
תרגיל:
הוכיחו את "אי שוויון המשולש השני" במרחב נורמי:

$$|\ \|u\| - \|v\|\ | \leq \|u \pm v\|$$

הסיקו שאם סדרת וקטורים $\{u_n\}$ מקיימת: $\|u_n - u\| \to 0$ אז $\|u_n\| \to \|u\|$.
פתרון:
נוכיח $|\ \|u\| - \|v\|\ | \leq \|u - v\|$.
אי-השוויון השני נובע ממנו: $|\ \|u\| - \|v\|\ | = |\ \|u\| - \|-v\|\ | \leq \|u - (-v)\| = \|u + v\|$
נשים לב, $u = v + (u - v)$ ולכן לפי אי-שוויון המשולש:

$$\|u\| \leq \|v\| + \|u - v\| \to \|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|$$

מאותה סיבה, $\|v\| - \|u\| \leq \|v - u\|$ אך $\|v - u\| = \|u - v\|$ ולכן:

$$\|u - v\| \geq max\left\{\|v\| - \|u\|, \|u\| - \|v\|\right\} = |\ \|u\| - \|v\|\ |$$

והוכחנו את הדרוש.
מאי שוויון נקבל:

$$0 \leq \|u_n\| - \|u\| \leq \|u_n - u\| \to 0$$

ולכן, לפי כלל הסנדוויץ, $\|u_n\| - \|u\| \to 0$ כלומר אכן: $\|u_n\| \to \|u\|$

תרגיל:

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ ותהי $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ קבוצה אורתונורמלית. יהי $x \in V$ כלשהו.

הוכיחו כי מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} | \langle x_i, x \rangle |^2 \leq \|x\|^2$$

פתרון:

נתבונן במרחב הוקטורי $span\{x_1, ..., x_n, x\}$. נסמן את המימד של המרחב ב-k.

אם x תלוי לינארית ב-$x_1, ..., x_n$ המימד הוא n.

אם לא אז המימד הוא $n+1$ (קבוצה אורתונורמאלית היא בת"ל)

בכל אופן, $k \geq n$, ונעבור מ-n ל-k.לפי גרם=שמידט נעבור לבסיס אורתונומלי: $\{x_1, ..., x_k\}$(כל האיברים זהים לאיברים הקודמים למעט אחד שאולי נוסף).

נציג את x כצירוף לינארי של איברי הבסיס: $x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$. כעת, לפי הלינאריות:

$$\|x\|^2 = | \langle x, x \rangle |^2 = \left| \left\langle \sum_{i=1}^{k} a_i x_i, \sum_{j=1}^{k} a_j x_j \right\rangle \right|^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} |a_i a_j \langle x_i, x_j \rangle |$$

מאורתוגונאליות,

$$\langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ולכן:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |a_i|^2$$

נצא את a_i, מלינאריות נקבל:

$$a_i = \sum_{j=1}^{k} a_j \langle x_i, x_j \rangle = \left\langle x, \sum_{j=1}^{k} a_j x_j \right\rangle = \langle x_i, x \rangle$$

ולכן:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |a_i|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x \rangle$$

שהרי $k \geq n$.

תזכורת(תהליך גרם שמידט)

בהינתן בסיס $v_1, v_2, ..., v_n$ למרחב וקטורי עם מכפלה פנימית ונורמה מושרית, רוצים למצוא בסיס המורכב מהוקטורים נורמאליים אותוגונאליים זה לזה ("אורתונורמאליים")

האלגוריתם הוא כזה:

1) $w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$

2) $t_2 = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_2$

$w_2 = \frac{t_2}{\|t_2\|}$

3) $t_3 = v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2$

$w_3 = \frac{t_3}{\|t_3\|}$

וכך הלאה.

דוגמה:

בצע גרם שמידט ל-$\{(2,0,0), (5,3,0), (4,6,7)\}$ לפי מ"פ סטנדרטית.

$v_1 = (2,0,0)$

$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = (1,0,0)$

$t_2 = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 = (5,3,0) - \langle (5,3,0), (1,0,0) \rangle \cdot (1,0,0) = (5,3,0) - 5 \cdot (1,0,0) = (0,3,0)$

$w_2 = \frac{t_2}{\|t2\|}$

$t_3 = v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle \cdot w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle \cdot w_2 =$

$= (4,6,7) - \langle (4,6,7), (1,0,0) \rangle (1,0,0) - \langle (4,6,7), (0,1,0) \rangle (0,1,0) = (0,0,7)$

$w_3 = \frac{t_3}{\|t_3\|} = (0,0,1)$

משפט:

נניח ש-$\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ הוא בסיס אורתונורמלי ל-V. אזי עבור כל $v \in V$:

$$v = \frac{< v, u_1 >}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 + \frac{< v, u_2 >}{\|u_2\|^2} \cdot u_2 + ... + \frac{< v, u_n >}{\|u_n\|^2} \cdot u_n$$

המקדם $k_i = \frac{<v,u_i>}{\|u_i\|^2}$ נקרא מקדם פורייה.

דוגמה:

תהי $S = \{(1,2,1), (2,1,-4), (3,-2,1)\}$ קבוצה אורתוגונאלית של וקטורים ומשום שהיא לת"ל במרחב ממימד 3 היא גם בסיס.

היה וקטור $v = (6,7,8)$.

הצג את vכצ"ל של איברי S.

נחשב מקדמי פוריה:

$< v, v_1 >= 1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 8 = 28$, $\|v_1\|^2 = 1 + 4 + 1 = 6$ ולכן $k_1 = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$

$< v, v_2 >= 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot (-4) = -13$, $\|v_2\|^2 = 4 + 1 + 16 = 21$ ולכן $k_2 = \frac{-13}{21}$

$< v, v_3 >= 3 \cdot 6 - 2 \cdot 7 + 1 \cdot 8 = 12$, $\|v_3\| = 9 + 4 + 1 = 14$, $k_3 = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$

ולכן $v = \frac{14}{3} \cdot (1,2,1) - \frac{13}{21}(2,1,-4) + \frac{6}{7} \cdot (3,-2,1)$

הגדרה (היטל):

נבחן וקטור שונה מאפס w במרחב מכפלה פנימית V. לכל $v \in V$ הסקלר $c = \frac{<v,w>}{<w,w>} = \frac{<v,w>}{\|w\|^2}$ הוא הסקלר היחיד כך ש-$v' = v - cw$ אורתוגונאלי ל-w. ההיטל של v לאורך w, מסומן על ידי

$$proj(v,w) = cw = \frac{< v,w >}{\|w\|^2} \cdot w$$

הסקלר c נקרא מקדם פורייה של v ביחס ל-w או הרכיב של v לאורך w.

דוגמה:

נמצא את ההיטל c ואת ההיטל cw של $v = (1,2,3,4)$ לאורך $w = (1,-3,4,-2)$ ב-$\mathbb{R}^4$.

ראשית נחשב:

$< v,w >= 1 - 6 + 12 - 8 = -1$

$\|w\|^2 = 1 + 9 + 16 + 4 = 30$

ולכן $c = \frac{-1}{30}$ ו-$proj(v,w) = cw = \left(-\frac{1}{30}, \frac{1}{10}, -\frac{2}{15}, \frac{1}{15}\right)$