פתרון תרגיל 7 – אינפי' 1

שאלה 1

נתבונן בטור $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+(-1)^n}$.

א. האם זהו טור לייבניץ? (שימו לב שהעובדה שהמנייה מתחילה מ- $n=2$ אינה פוגעת בהיותו של טור להיות לייבניץ)

ב. האם הטור מתכנס?

פתרון

א. $a_n=\frac{1}{n+(-1)^n}$ אינה מונוטונית יורדת ולכן הטור אינו לייבניץ. אכן מתקיים: $a_{2k}=\frac{1}{2k+1}>\frac{1}{2k}=\frac{1}{(2k+1)-1}=a_{2k+1}$.

ב. נוכיח שהטור מתכנס. אינטואיציה: הטור שלנו "מזכיר במראה שלו" את טור לייבניץ המתכנס $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

תהיינה $b_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$,

$$c_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n+(-1)^n}$$

$$c_n-b_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n+(-1)^n}-\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)=\frac{(-1)^{n+1}n-\left(n+(-1)^n\right)(-1)^{n+1}}{n\left(n+(-1)^n\right)}=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}n-(-1)^{n+1}n-(-1)^{2n+1}}{n\left(n+(-1)^n\right)}=\frac{-(-1)^{2n+1}}{n\left(n+(-1)^n\right)}=\frac{1}{n\left(n+(-1)^n\right)}$$

הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\left(n+(-1)^n\right)}=\sum_{n=2}^{\infty}(c_n-b_n)$ מתכנס . זה נובע מכך שמדובר בטור חיובי וממבחן ההשוואה הגבולי עם הטור המתכנס $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

אכן, מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n\left(n+(-1)^n\right)}}{\frac{1}{n^2}}=1$ (בדקו!). כעת $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(c_n-b_n\right)$ מתכנס

(נניח ל $L\in\mathbb{R}$). טור לייבניץ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס (נניח ל $M\in\mathbb{R}$) ולכן הטור

שלנו $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\left(c_n-b_n\right)+b_n\right)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}c_n$ מתכנס ל $L+M$.

מש"ל

<u>שאלה 2</u>

קבעו האם הטור מתכנס בהחלט, בתנאי או מתבדר: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{\sqrt{n^4-n^2}}$.

<u>פתרון</u>

נפשט תחילה את הביטוי $\dfrac{n}{\sqrt{n^4-n^2}}$. מתקיים

$\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}=\dfrac{n}{n\sqrt{n^2-1}}=\dfrac{n}{\sqrt{n^2(n^2-1)}}=\dfrac{n}{\sqrt{n^4-n^2}}$. קל לראות ש $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}=0$ וכן

שהסדרה $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}\right\}$ מונוטונית יורדת. מכאן הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{\sqrt{n^4-n^2}}$

מתכנס עפ"י מבחן לייבניץ.

נראה שהטור לא מתכנס בהחלט . הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n n}{\sqrt{n^4-n^2}}\right|$

מתבדר לפי מבחן השוואה גבולי עם הטור המתבדר $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, שכן נקבל

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}}{\frac{1}{n}}=1$ (בדקו!). בסה"כ הטור המקורי שלנו מתכנס בתנאי.

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

א. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)$ חסום (כאשר $x \neq 2\pi k$).

הדרכה: הכפילו וחלקו ב- $2\sin\frac{x}{2}$ והשתמשו בזהות הטריגונומטרית של מכפלת קוסינוס בסינוס.

ב. הסיקו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n}$ מתכנס (כאשר $x \neq 2\pi k$).

<u>פתרון</u>

א. ניעזר בנוסחה $2\cos\theta\sin\varphi = \sin(\theta+\varphi) - \sin(\theta-\varphi)$. סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)$ היא מהצורה

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(kx)2\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\cos(kx)\sin\frac{x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(kx+\frac{x}{2}\right) - \sin\left(kx-\frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin(1.5x) - \sin(0.5x) + \sin(2.5x) - \sin(1.5x) + \cdots + \sin\left(nx+\frac{x}{2}\right) - \sin\left(nx-\frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(-\sin(0.5x) + \sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)\right)$$

(ודאו שאתם מבינים איך האיברים מצטמצמים).

לכן $|S_n| = \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\left|\left(-\sin(0.5x) + \sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)\right)\right| \le \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right|(1+1) = \left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|$.

סס"ח של הטור חסומה ולפי הגדרה זה אומר שהטור חסום.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n}$ הוא מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ כאשר $\{a_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ סדרה מונוטונית שואפת לאפס ו- $\{b_n\}=\{\cos(nx)\}$ סדרה כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ טור חסום (עפ"י מה שהוכחנו בסעיף הקודם) לכן הטור מתכנס עפ"י מבחן דיריכלה.

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n\left(3^n-1\right)}$.

<u>פתרון</u>

$a_nb_n=\frac{3^n}{2^n\left(3^n-1\right)}$ כאשר $a_n=\frac{3^n}{3^n-1}$ ו $b_n=\frac{1}{2^n}$ לכל n. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ הוא טור גיאומטרי מתכנס. נראה שהסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית וחסומה ולכן עפ"י מבחן אבל נקבל שהטור שלנו $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n\left(3^n-1\right)}$ מתכנס.

נשים לב ש $a_n=\frac{3^n}{3^n-1}=\frac{3^n-1+1}{3^n-1}=1+\frac{1}{3^n-1}$ ומכאן קל לראות שהסדרה מונוטונית. כמו כן מתקיים $\left|1+\frac{1}{3^n-1}\right|=1+\frac{1}{3^n-1}<1+1=2$ ולכן הסדרה חסומה.

מש"ל

<u>שאלה 5</u>

הוכיחו ש $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס לכל סדרה חסומה b_n.

<u>פתרון</u>

$\Leftarrow$ נניח שהטור מתכנס כלומר $\sum|a_n|<\infty$. תהי b_n סדרה חסומה כלשהי, לכן קיים $k>0$ כך ש $|b_n|\le k$ ולכן $|a_nb_n|=|a_n||b_n|\le k|a_n|$ ולפי מבחן ההשוואה הראשון הטור $\sum|a_nb_n|$ מתכנס. לכן גם הטור $\sum a_nb_n$ מתכנס.

$\Rightarrow$שימו לב, נתון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס **לכל** סדרה חסומה, ובפרט לכל סדרה **חסומה** שנבחר. כעת, נגדיר את הסדרה b_n באופן הבא: בכל האינדקסים בהם $a_n=0$ נגדיר $b_n=0$, ואחרת נגדיר $b_n=\frac{|a_n|}{a_n}$. כלומר:

$$b_n=\begin{cases}0 & a_n=0\\ \frac{|a_n|}{a_n} & otherwise\end{cases}$$. כעת,

$$|b_n|=\begin{cases}0 & a_n=0\\ \left|\frac{|a_n|}{a_n}\right| & otherwise\end{cases}=\begin{cases}0 & a_n=0\\ 1 & otherwise\end{cases}$$; לכן b_n סדרה חסומה

על ידי 1. לכן לפי הנתון $\sum a_nb_n<\infty$ אבל $\sum a_nb_n=\sum|a_n|$ כלומר $\sum a_n$ מתכנס בהחלט כפי שרצינו.

מש"ל

<u>שאלה 6</u>

בדקו את ההתכנסות וההתכנסות בהחלט של הטורים הבאים:

א. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{n^2}}{(n!)^3}$$

נבדוק דבר ראשון התכנסות בהחלט, כלומר האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2}}{(n!)^3}$ מתכנס. נסתכל על $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{3^{(n+1)^2}}{\left((n+1)!\right)^3}\frac{(n!)^3}{3^{n^2}}=\frac{3^{2n+1}}{(n+1)^3}$. נוכיח

באינדוקציה כי $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$ לכל n. עבור $n=1$ ברור. נניח נכון עבור n נוכיח עבור $n+1$:

$$\left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|=\frac{3^{2(n+1)+1}}{\left((n+1)+1\right)^3}=\frac{3^2 3^{2n+1}}{(n+1)^3+3(n+1)^2+3(n+1)+1}\geq$$

$$\geq\frac{3^2 3^{2n+1}}{(n+1)^3+3(n+1)^3+3(n+1)^3+(n+1)^3}=\frac{9}{8}\frac{3^{2n+1}}{(n+1)^3}\geq\frac{3^{2n+1}}{(n+1)^3}>1$$

(השלב האחרון לפי הנחת האינדוקציה).

לכן $|a_n|$ מונוטונית עולה וגדולה ממש מאפס ולכן בהכרח $\lim_{n\to\infty}|a_n|\neq 0$

ולכן $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ ולכן למעשה הטור מתבדר.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos(n+\pi)}{n^{1.3}}$

$\left|\frac{(-1)^{n+1}\cos(n+\pi)}{n^{1.3}}\right|<\frac{1}{n^{1.3}}$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.3}}$ מתכנס ומכאן עפ"י מבחן

השוואה ראשון $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cos(n+\pi)}{n^{1.3}}\right|$ מתכנס. מכאן,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos(n+\pi)}{n^{1.3}}$ מתכנס בהחלט.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

דבר ראשון נבדוק התכנסות בהחלט, כלומר את התכנסות הטור

$\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$. נסתכל על הסכומים החלקיים של טור זה:

$$\begin{aligned}
S_1&=\log\left(\frac{2}{1}\right)=\log 2-\log 1=\log 2\\
S_2&=\log 2-\log 1+\log 3-\log 2=\log 3-\log 1=\log 3\\
S_3&=\log 2-\log 1+\log 3-\log 2+\log 4-\log 3=\log 4\\
&\vdots\\
S_n&=\log(n+1)
\end{aligned}$$

לכן $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ ולכן הטור מתבדר, כלומר הטור המקורי אינו מתכנס בהחלט.

נמשיך, קל לוודא ש $\frac{n+1}{n}$ מונוטונית יורדת ושואפת ל1 ולכן $\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ מונוטונית יורדת לאפס ולכן לפי משפט לייבניץ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ מתכנס בתנאי.

מש"ל

<u>שאלה 7</u>

בדקו את התכנסות הטור: $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots$

<u>פתרון</u>

נניח בשלילה שהטור מתכנס. לכן גם הטור עם סוגריים יתכנס. נוסיף סוגריים באופן הבא:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\ldots=\frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\ldots=\sum\frac{2}{n}$$

הטור הנ"ל מתבדר, בסתירה להנחה, ולכן גם הטור המקורי מתבדר.

מש"ל