תרגיל 1

1. הוכיחו כי בכל מרחב מטרי (X,d) מתקיים:
א. $d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2)+...+d(x_{n-1},x_n)$ לכל $n \geq 2$.
ב. $|d(x,z)-d(y,z)| \leq d(x,y)$.
ג. $\forall A \subseteq X, |d(x,A)-d(y,A)| \leq d(x,y)$.

2. נסמן בX את אוסף כל הסדרות שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2...,n\}$, ונגדיר את הפו' הבאה $d: X \times X \to [0,\infty)$ ע"י:

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \dfrac{1}{\min\{i: x_i \neq y_i\}} & x \neq y\end{cases}.$$

הוכיחו כי d היא אולטרה מטריקה על X.
פתרון:

$(x,y)=0 \iff d(x,y)=0$ נובע ישירות מההגדרה.

סימטריות: טירוויאלי.

אי"ש המשולש: יהיו x,y,z 3 סדרות בX. אם שתיים מהן שוות אז האי שוויון טריוויאלי. אז נניח ש $x \neq y, x \neq z, y \neq z$. נסמן $j=\min\{i: x_i \neq y_i\}, k=\min\{i: y_i \neq z_i\}$. אז $\min\{i: x_i \neq z_i\} \geq \min\{j,k\}$. הסבר: אם $t<j,k$ אז $x_t=y_t \wedge y_t=z_t \implies x_t=z_t$. לכן: $d(x,z)=\frac{1}{\min\{i: x_i \neq z_i\}} \leq \frac{1}{\min\{j,k\}}=\max\{\frac{1}{j},\frac{1}{k}\}=\max\{d(x,y),d(y,z)\}$.

3. הוכיחו או הפריכו: הפונקציות הבאות הן מטריקות:
א. $d_{\min}((x,y),(x',y'))=\min\{d(x,x'),d(y,y')\}$ על $\mathbb{R}^2$(כאשר d היא המטריקה האוקלידית על $\mathbb{R}$).
ב. $d((x,y),(x',y'))=|x|+|y|+|x'|+|y'|$ על $\mathbb{R}^2$.
ג. $d_{\sum}((x,y),(x',y'))=d(x,x')+d(y,y')$ על $X \times X$ כאשר (X,d) הוא מרחב מטרי.
פתרון:

א. הפרכה: $(0,1) \neq (0,0)$ אבל $d((0,0),(0,1))=\min\{0,1\}=0$.

ב. הפרכה: $(0,1)=(0,1)$ אבל $d((0,1),(0,1))=2$.

ג. הוכחה: ראשית, יש להראות שהפו' הולכת לתוך $[0,\infty)$. זה נובע מכך ש $d(x,x'),d(y,y') \geq 0$, וסכום של מספרים אי שליליים הוא אי שלילי.

$0=d(x,x')+d(y,y') \iff d_{\sum}((x,y),(x',y'))=0$. בגלל ש$d$ מטריקה, $d(x,x'),d(y,y') \geq 0$. לכן זה שקול לכך ש $d(x,x')=0 \wedge d(y,y')=0$ וזה קורה אמ"ם $x=x' \wedge y=y'$. כלומר $(x,y)=(x',y')$.

סימטריות: $d_{\sum}((x,y),(x',y')) = d(x,x') + d(y,y') = d(x',x) + d(y',y) =$ $.d_{\sum}((x',y'),(x,y))$

אי״ש המשולש: $d_{\sum}((x,y),(x',y')) = d(x,x')+d(y,y') \le d(x,x'')+d(x'',x')+$ $.d(y,y'') + d(y'',y') = d_{\sum}((x,y),(x'',y'')) + d_{\sum}((x'',x'),(y'',y'))$

4. תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה הp - אדית באופן הבא: עבור $p \in \mathbb{N}$ ראשוני, מגדירים $k(x,y) = \max\{i : p^i|(x-y)\}$. ו $d_p(x,y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ \dfrac{1}{p^{k(x,y)}} & x \ne y \end{cases}$.

תארו את הכדור $B_{d_7}(3,\frac{1}{49})$ במרחב $(\mathbb{Z}, d_7)$.

פתרון:

$z \in B(3,\frac{1}{49}) \iff d(3,z) \le \frac{1}{49} \iff z = 3 \vee k(3,z) \ge 2 \iff z =$ $3 \vee z = 3 + 49x$. כלומר, $B(3,\frac{1}{49}) = 3 + 49\mathbb{Z}$

5. יהי (X,d) מרחב מטרי, $x_1, x_2 \in X$ ו $r_1, r_2 > 0$, ונניח ש $p \in B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$. נסמן

$$r = \min\{r_1 - d(x_1,p), r_2 - d(x_2,p)\}$$

הוכיחו ש .

$$B(p,r) \subseteq B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$$

.

פתרון:

יהי $y \in B(p,r)$. כלומר, $d(y,p) \le r$. מאי שוויון המשולש, $d(y,x_1) \le d(y,p) +$ $d(p,x_1) \le r_1 - d(x_1,p) + d(x_1,p) = r_1$. לכן $y \in B(p,r)$. כנ״ל לגבי $B(x_2,r_2)$.

שאלת אתגר: הראו שאם $(X, ||\cdot||)$ מרחב נורמי, וd המטריקה המושרית מהנורמה, אז לא קיימים כדורים שונים $B(a_1,r_1), B(a_2 r_2)$ כך ש $r_1 < r_2$ וגם $B(a_2,r_2) \subseteq B(a_1,r_1)$.

פתרון:

נניח $a_1 \ne a_2$ $r_1 < r_2$, ונניח בשלילה שמתקיים $B(a_2,r_2) \subset B(a_1,r_1)$. אזי $a_2 \in$ $B(a_2,r_2) \subset B(a_1,r_1)$ ולכן $||a_2 - a_1|| < r_1$. יהי $v = a_1 + r_1\dfrac{a_2-a_1}{||a_2-a_1||}$. מתקיים:

$||v - a_2|| = ||a_1 + r_1\dfrac{a_2-a_1}{||a_2-a_1||} - a_2|| = ||(a_2-a_1)(\dfrac{r_1}{||a_2-a_1||} - 1)|| =$ $||a_2 - a_1|| \cdot |\dfrac{r_1 - ||a_2-a_1||}{||a_2-a_1||}| = |r_1 - ||a_2-a_1||| = r_1 - ||a_1 - a_2|| < r_1 < r_2$. לכן $v \in B(a_2,r_2)$. אבל $||v - a_1|| = ||r_1\dfrac{a_2-a_1}{||a_2-a_1||}|| = r_1$, ולכן $v \notin B(a_1,r_1)$. סתירה.