

תרגיל #3

6 בנובמבר 2012

1. חשב את הפולינומים האופייניים, ערכים עצממיים ווקטורים עצמיים של המטריצות הבאות:

$$\text{(א)} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$\text{(ב)} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

עבור $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ נתונות.

(ג) מה הקשר בין מטריצות הללו למספרים מרוכבים?

2. חשב פולינום אופייני של המטריצות הבאות:

$$\text{(א)} \quad \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & b \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\text{(ב)} \quad \begin{pmatrix} a & b & \dots & & b \\ b & a & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \\ & & & & b \\ b & \dots & & b & a \end{pmatrix}$$

3. נסמן ב $\mathbb{R}_3[x]$ את מרחב כל הפולינומים ממעלה 3 או פחות מעל שדה הממשיים. תהי $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ המוגדרת על ידי $T(f) = [(x+1)f(x)]'$. מצא פולינום אופייני, ערכים עצמיים וריבוי גאומטרי ואלגברי של כל ערך.

תזכורת: בתרגול הגדרנו נגזרת של פולינום על ידי

$$(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0)' = n a_n x^{n-1} + \dots + a_1$$

4. יהי \mathbb{F} שדה. יהי $f \in \mathbb{F}[x]$, כך ש $\deg f > 0$ אנו נאמר ש f הוא אי-פריק אם המחלקים היחידים שלו הם הוא עצמו ו 1 (עד כדי כפל בסלר ב \mathbb{F}).

(א) הוכח, אם $f \in \mathbb{F}[x]$ אי פריק, אזי לכל $g, h \in \mathbb{F}[x]$, אם f מחלק את gh אזי f מחלק את g או ש f מחלק את h . (רמז - מה למדתם על מספרים זרים בתרגול?)

(ב) השתמש בסעיף הקודם על מנת להוכיח שכל פולינום ב $\mathbb{F}[x]$ ניתן להציג כמכפלה של גורמים אי-פריקים. (רמז: אינדוקציה)

(ג) הראה שהצגה מסעיף הקודם הינה יחידה עד כדי סדר של גורמים ומכפלה שלהם בסקלר.

5. (ממבחן). יהי $V = M_2(\mathbb{R})$. תהי $T : V \rightarrow V$ ששולחת כל מטריצה למשוחלפת שלה $T(A) = A^t$.

(א) מצאו את הפולינום האופייני של T

(ב) מצאו ערכים עצמיים של T . עבור כל ערך עצמי מצאו ריבוי גאומטרי וריבוי האלגברי שלו. האם T לכסינה? (העתקה לכסינה אם ורק אם ריבוי גאומטרי וריבוי האלגברי של כל ערך שווים).

בהצלחה!