הרצאה 3

מטריצות

הגדרות וסימונים

הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{m1} & & & & a_{mn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{F}, \left(i=1,\dots,m : j=1,\dots,n \right) \right\} =: \mathbb{F}^{m\times n}$ היא אוסף

המטריצות $m\times n$ מעל השדה $\mathbb{F}$. מסומן גם: $M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$. הביטוי $m\times n$ נקרא סדר המטריצה.

כאשר m מייצג את מספר השורות ו n מייצג את מספר העמודות.

מטריצות מסדר $1\times n$ נקרות וקטורי שורה.

מטריצות מסדר $m\times 1$ נקראות וקטורי עמודה.

דוגמאות

המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ היא מסדר 2×2. המטריצה $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 11 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ היא מסדר 3×2.

המטריצה $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ היא מסדר 3×1 ונקראת גם וקטור עמודה.

המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ היא מסדר 1×3 ונקראת גם וקטור שורה.

שוויון מטריצות

מטריצות $A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו $B=\left(b_{ij}\right)\in\mathbb{F}^{k\times l}$ הן שוות אם:

א. $k=m$ וגם $l=n$. ז"א המטריצות מאותו הסדר.

ב. לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$ מתקיים $a_{ij}=b_{ij}$.

במקרה זה כותבים $A=B$.

דוגמאות

המטריצות $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ לא שוות מכיוון שהן לא מאותו סדר.

המטריצות $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ לא שוות מכיוון ש $a_{12}\neq b_{12}$.

המטריצות $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ שוות ובמקרה זה ניתן לרשום $A=B$.

חיבור מטריצות

ניתן להגדיר חיבור של שתי מטריצות A,B רק אם המטריצות מאותו הסדר.

החיבור של שתי מטריצות $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מתבצע ע"י חיבור האיברים במקומות החופפים.

$C=A+B$ פירושו $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).

דוגמאות

1. לא ניתן לחבר את המטריצות $A=\begin{pmatrix}1&3&5&2\\0&-1&2&3\\4&6&7&9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&4&5\\6&-1&4\\11&6&7\\-5&5&9\end{pmatrix}$ מכיוון שהן לא מאותו סדר. המטריצה A מסדר 3×4 והמטריצה B מסדר 4×3.

2. $B=\begin{pmatrix}-1&3\\2&5\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1&-2\\2&3\end{pmatrix} \Leftarrow A+B=\begin{pmatrix}0&1\\4&8\end{pmatrix}$.

כפל סקלר

כפל סקלר $\alpha\in\mathbb{F}$ במטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מוגדר ע"י כפל כל אחד מרכיבי המטריצה A ב α:
$C=\alpha A$ פירושו: $c_{ij}=\alpha a_{ij}$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).

דוגמא

$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\-3&0&4\end{pmatrix} \Leftarrow 3A=\begin{pmatrix}6&3&9\\-9&0&12\end{pmatrix}$. במקרה זה $\alpha=3$.

מטריצת האפס

מטריצת האפס $0\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מוגדרת ע"י $o_{ij}=0$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).

המטריצה הנגדית

המטריצה הנגדית $C=-A$ של מטריצה A מוגדרת על ידי $c_{ij}=-a_{ij}$
(לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).

דוגמא

המטריצה הנגדית של $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}$ היא $-A=\begin{pmatrix}-2&-3\\-1&-4\end{pmatrix}$.

תכונות

עבור מטריצות $A,B,C\in\mathbb{F}^{m\times n}$ וסקלרים $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ מתקיים:
א. $A+B=B+A$. ב. $A+(B+C)=(A+B)+C$. ג. $A+0=0+A=A$.
ד. $A+(-A)=(-A)+A=0$. ה. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$. ו. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.
ז. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$. ח. $0A=0$ ו $1A=A$.

הוכחה

א.
$C=A+B$ פירושו $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).
$D=B+A$ פירושו $d_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).
מתכונת החילוף בשדה נקבל ש $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).
סה"כ קיבלנו ש $d_{ij}=c_{ij}$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$), ולכן $C=D$.

ב.
$D=(A+B)+C$ פירושו $d_{ij}=(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).
$E=A+(B+C)$ פירושו $e_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).
מתכונת האסוציאטיביות בשדה נקבל ש $(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).

סה"כ קיבלנו ש $d_{ij}=e_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$), ולכן $D=E$.

ג.

מסעיף א נקבל $A+0=0+A$.

מטריצת האפס $0\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מוגדרת ע"י $o_{ij}=0$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

$C=A+0$ פירושו $c_{ij}=a_{ij}+0_{ij}=a_{ij}+0=a_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$), ולכן $C=A$.

ד.

מסעיף א נקבל ש $A+(-A)=(-A)+A$.

$C=A+(-A)$ פירושו $c_{ij}=a_{ij}+(-a_{ij})=0$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$), ולכן $C=0$.

ה.

$C=A+B$ פירושו $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

$D=\alpha(A+B)=\alpha C$ פירושו $d_{ij}=\alpha c_{ij}=\alpha(a_{ij}+b_{ij})=\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

$E=\alpha A$ פירושו: $e_{ij}=\alpha a_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

$F=\alpha B$ פירושו: $f_{ij}=\alpha b_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

סה"כ קיבלנו ש $D=E+F$.

ו.

$C=(\alpha+\beta)A$ פירושו: $c_{ij}=(\alpha+\beta)a_{ij}=\alpha a_{ij}+\beta a_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

$D=\alpha A$ פירושו: $d_{ij}=\alpha a_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

$E=\beta A$ פירושו: $e_{ij}=\beta a_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

ולכן $C=D+E$.

ז.

$C=(\alpha\beta)A$ פירושו: $c_{ij}=(\alpha\beta)a_{ij}=\alpha(\beta a_{ij})$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

$D=\beta A$ פירושו: $d_{ij}=\beta a_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

$E=\alpha(\beta A)=\alpha D$ פירושו: $e_{ij}=\alpha d_{ij}=\alpha(\beta a_{ij})$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

סה"כ קיבלנו ש $C=E$.

ח.

$C=0A$ פירושו: $c_{ij}=0\cdot a_{ij}=0$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$), ולכן $C=0$.

$C=1A$ פירושו: $c_{ij}=1\cdot a_{ij}=a_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$), ולכן $C=A$.

<u>כפל מטריצות</u>

הכפל $C=AB$ של שתי מטריצות מוגדר רק כאשר מספר העמודות ב A שווה למספר השורות ב B.

הכפל $C=AB$ של שתי מטריצות $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו $B\in\mathbb{F}^{n\times k}$ מתבצע בצורה הבאה:

$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,k$. התוצאה היא המטריצה $C=(c_{ij})\in\mathbb{F}^{m\times k}$.

<u>דוגמאות</u>

1.

$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ נשים לב תחילה שהכפל AB מוגדר מכיוון שמספר העמודות ב A שווה למספר השורות ב B. נחשב את הכפל $C=AB$.

$$c_{11}=\sum_{k=1}^{3}a_{1k}b_{k1}=1\cdot 1+(-1)\cdot 2+(-2)\cdot 3=-7$$
$$c_{12}=\sum_{k=1}^{3}a_{1k}b_{k2}=1\cdot 0+(-1)\cdot(-1)+(-2)\cdot 1=-1$$
$$c_{13}=\sum_{k=1}^{3}a_{1k}b_{k3}=1\cdot 0+(-1)\cdot 2+(-2)\cdot 1=-4$$
$$c_{21}=\sum_{k=1}^{3}a_{2k}b_{k1}=2\cdot 1+0\cdot 2+3\cdot 3=11$$
$$c_{22}=\sum_{k=1}^{3}a_{2k}b_{k2}=2\cdot 0+0\cdot(-1)+3\cdot 1=3$$
$$c_{23}=\sum_{k=1}^{3}a_{2k}b_{k3}=2\cdot 0+0\cdot 2+3\cdot 1=3$$
$$\Leftarrow C=\begin{pmatrix}-7 & -1 & -4\\ 11 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

נשים לב שהכפל BA לא מוגדר וזאת מכיוון שמספר העמודות ב B שונה ממספר השורות ב A.

.2

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ נשים לב שהכפל AB מוגדר וכן הכפל BA.

נסמן $C=AB$ ו $D=BA$. נראה ש $C\neq D$.

$$c_{11}=\sum_{k=1}^{2}a_{1k}b_{k1}=1\cdot 2+(-1)\cdot(-1)=3$$
$$d_{11}=\sum_{k=1}^{2}b_{1k}a_{k1}=2\cdot 1+1\cdot 2=4$$
$$\Leftarrow c_{11}\neq d_{11}\Leftarrow C\neq D.$$

<u>תכונות</u>

אם המכפלה באחד האגפים מוגדרת, אז גם המכפלה באגף השני מוגדרת, ותוצאתן שווה:

א. $A(BC)=(AB)C$.

ב. $A(B+C)=AB+AC$.

ג. $(B+C)A=BA+CA$.

ד. כאשר $\alpha\in F$ מתקיים $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$.

ה. $A0=0$ וכן $0A=0$.

<u>הוכחה</u>

.א

נניח שהכפל באגף שמאל מוגדר ז"א מספר העמודות ב B שווה למספר השורות ב C.

$B\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו $C\in\mathbb{F}^{n\times k}$ ומתקיים $BC\in\mathbb{F}^{m\times k}$. הכפל $A(BC)$ מוגדר ולכן מספר העמודות ב A שווה למספר השורות ב BC ולכן $A\in\mathbb{F}^{l\times m}$.

מספר העמודות ב A הוא m ומספר השורות ב B הוא n ולכן הכפל AB מוגדר ומתקיים $AB\in\mathbb{F}^{l\times n}$ ולכן מספר העמודות ב AB שווה ל n ששווה למספר השורות ב C.

באותו אופן ניתן להראות שאם הכפל באגף ימין מוגדר אז הכפל באגף שמאל מוגדר.

נראה שהתוצאות שוות.

נניח ש $B\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $C\in\mathbb{F}^{n\times k}$ ו $A\in\mathbb{F}^{l\times m}$.

נסמן $D=BC$ ואז $d_{ij}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}c_{kj}$.

נסמן $E=AD$ ואז $e_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}d_{kj}=\sum_{k=1}^{m}\left(a_{ik}\sum_{t=1}^{n}b_{kt}c_{tj}\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{n}a_{ik}b_{kt}c_{tj}\right)$.

נסמן $F=AB$ ואז $f_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$.

נסמן $G=FC$ ואז $g_{ij}=\sum_{k=1}^{n}f_{ik}c_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{t=1}^{m}a_{it}b_{tk}\right)c_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{t=1}^{m}a_{it}b_{tk}c_{kj}\right)$.

סה"כ קיבלנו ש $e_{ij}=g_{ij}$.

ב.

אם אגף שמאל מוגדר אז הסדר של המטריצות B,C זהה. נסמן $B,C\in\mathbb{F}^{m\times n}$.
הכפל מוגדר ולכן מספר העמודות ב A שווה למספר השורות ב $B+C$.
מספר השורות ב $B+C$ הוא m ואז $A\in\mathbb{F}^{k\times m}$ ו $A(B+C)\in\mathbb{F}^{k\times n}$.

מספר עמודות ב A שווה למספר השורות ב B ולכן הכפל AB מוגדר ומתקיים $AB\in\mathbb{F}^{k\times n}$, באותו אופן $AC\in\mathbb{F}^{k\times n}$. הסדר של AB, AC שווה ולכן החיבור בין המטריצות מוגדר ומתקיים $AB+AC\in\mathbb{F}^{k\times n}$.

באופן דומה ניתן להראות שאם אגף ימין מוגדר אז גם אגף שמאל מוגדר.

נסמן $D=B+C$ ואז $d_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$.

נסמן $E=AD$ ואז $e_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}d_{kj}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}\cdot\left(b_{kj}+c_{kj}\right)=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{m}a_{ik}c_{kj}$.

נסמן $F=AB$ ואז $f_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$. נסמן $G=AC$ ואז $g_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}c_{kj}$.

נשים לב ש $e_{ij}=g_{ij}+f_{ij}$ כדרוש.

תכונות ג, ד, ה בתרגיל בית.

<u>כפל שורה - שורה וכפל עמודה – עמודה</u>

תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$.

יהא $1\le i\le m$ השורה ה i של A (מסומנת: $R_i(A)$) היא הווקטור $v\in\mathbb{F}^{1\times n}$ המקיים $v_j=a_{ij}$ לכל $j=1,\dots,n$.

יהא $1\le j\le n$ העמודה ה j של A (מסומנת: $C_j(A)$) היא הווקטור $v\in\mathbb{F}^{m\times 1}$ המקיים $v_i=a_{ij}$ לכל $i=1,\dots,m$.

<u>דוגמא</u>

תהי $A=\begin{pmatrix}12 & 3\\ -1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ אז $R_2(A)=\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}$ ו $C_2(A)=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$.

<u>סימון</u>

עבור $i=1,\dots,n$ נסמן ב e_i את הווקטור ב $\mathbb{F}^n$ שכולו אפסים פרט למקום ה i , שבו כתוב 1.

דוגמא

$e_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

משפט

יהיו נתונות מטריצות $A\in\mathbb{F}^{m\times n}, B\in\mathbb{F}^{n\times k}$, ותהא $C=AB\in\mathbb{F}^{m\times k}$. אז מתקיים:

1. $AB=\begin{pmatrix}R_1(A)B\\ .\\ .\\ .\\ R_m(A)B\end{pmatrix}$.

2. $AB=\begin{pmatrix}AC_1(B) & AC_2(B) & . & . & . & AC_k(B)\end{pmatrix}$.

הוכחה 1

מספיק להוכיח ש $R_i(C)=R_i(A)B$.

דוגמא

$B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ 4 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. $C=AB\Leftarrow C=\begin{pmatrix}1 & 4 & 9\\ 9 & 0 & 3\\ 11 & 8 & 21\\ 5 & -4 & -7\end{pmatrix}$.

$R_3(A)=\begin{pmatrix}4 & 5\end{pmatrix}$.

$R_3(A)B=\begin{pmatrix}4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 8 & 21\end{pmatrix}=C_3(C)$.

המשך הוכחה

אם $C=AB$ אז $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\Leftarrow R_i(C)=\begin{pmatrix}\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{t1} & \sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{t2} & . & . & . & \sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tk}\end{pmatrix}$.

$R_i(A)=\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in}\end{pmatrix}\Leftarrow D=R_i(A)B\Leftarrow d_j=\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tj}$.

סה"כ קיבלנו שוויון.

באותו אופן ניתן להוכיח את סעיף 2.

המטריצה המשוחלפת

תהיי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$. המטריצה המשוחלפת $A^t\in\mathbb{F}^{n\times m}$ מוגדרת ע"י $b_{ij}=a_{ji}$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,m$)

דוגמאות

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\\ -1 & -2\end{pmatrix}\Leftarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Leftarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

תכונות המטריצה המשוחלפת

א. אם $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$ אז $(A+B)^t=A^t+B^t$.

ב. אם $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו $B\in\mathbb{F}^{n\times k}$ אז הכפל B^tA^t מוגדר היטב ומתקיים $(AB)^t=B^tA^t$.

הוכחה

א. נסמן $C=A+B$ ואז $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. אם $D=C^t$ אז $d_{ij}=c_{ji}=a_{ji}+b_{ji}$.

האיבר בשורה ה i והעמודה ה j של A^t הוא a_{ji}.

האיבר בשורה ה i והעמודה ה j של B^t הוא b_{ji}.

נסמן $F=A^t+B^t$ ואז $f_{ij}=a_{ji}+b_{ji}\Leftarrow d_{ij}=f_{ij}\Leftarrow D=F$.

ב. מספר העמודות של A הוא n ולכן מספר השורות של A^t הוא n.

מספר השורות של B הוא n ולכן מספר העמודות של B^t הוא n.

סה"כ מספר העמודות של B^t שווה למספר השורות של A^t ולכן הכפל B^tA^t מוגדר היטב.

נסמן $C=AB$ ואז $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$. אם $D=C^t$ אז $d_{ij}=c_{ji}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}$.

נסמן $F=B^t,G=A^t,H=FG$.

נקבל ש $h_{ij}=\sum_{k=1}^{n}f_{ik}g_{kj}=\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}$.

סה"כ נקבל ש $d_{ij}=h_{ij}\Leftarrow D=H$.

דוגמא

$$B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\\-4&1\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&-2&-3\end{pmatrix}\Rightarrow AB=\begin{pmatrix}-6&1\\17&-3\end{pmatrix}.$$

$B^t=\begin{pmatrix}1&-1&-4\\2&3&1\end{pmatrix},A^t=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\\2&-3\end{pmatrix}$ מספר העמודות ב B^t שווה למספר השורות ב A^t ולכן

הכפל מוגדר.

$B^tA^t=\begin{pmatrix}-6&17\\1&-3\end{pmatrix}$ ואכן מתקיים $(AB)^t=B^tA^t$.

תרגיל

מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת סימטרית אם $A^t=A$ ואנטי-סימטרית אם $A^t=-A$.

א. הוכח שאם $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ אז AA^t היא מטריצה סימטרית.

ב. הוכח שאם $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אז $A-A^t$ היא מטריצה אנטי-סימטרית. (שימו לב שאם A לא מטריצה ריבועית אז לא ניתן לחשב את $A-A^t$).

פתרון

א. $(AA^t)^t=(A^t)^tA^t=AA^t$ ולכן AA^t היא מטריצה סימטרית.

ב. $(A-A^t)^t=A^t-(A^t)^t=A^t-A=-(A-A^t)$ ולכן $A-A^t$ היא מטריצה אנטי סימטרית.

מטריצות ריבועיות

הגדרה

מטריצה מסדר $n\times n$ נקראת מטריצה ריבועית.

תרגיל

מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת משולשית עליונה אם לכל $j<i$, $a_{ij}=0$.

הוכח שאם $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ משולשיות עליונות אז AB משולשית עליונה ו BA משולשית עליונה.

דוגמא לתרגיל

$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$. $BA=\begin{pmatrix}2 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 14\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$.

פתרון התרגיל

מהמשפט הקודם נקבל שאם $C=AB$ אז $R_i(C)=R_i(A)B$.

ראינו ש $R_i(C)=\begin{pmatrix}\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{t1} & \sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{t2} & . & . & . & \sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tk}\end{pmatrix}$, ולכן מספיק להוכיח שאם $j<i$ אז $\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tj}=0$.

נניח ש $j<i$.

מכיוון ש B משולשית עליונה נקבל שאם $j<t$ אז $b_{tj}=0$.

אם $t\le j$ מכיוון ש $j<i$ נקבל ש $t<i$ ואז מכיוון ש A משולשית עליונה נקבל ש $a_{it}=0$.

סה"כ קיבלנו שלכל $1\le t\le n$ או ש $b_{tj}=0$ או ש $a_{it}=0$ ולכן $a_{it}b_{tj}=0$ ואז $\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tj}=0$.

הערה

מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת משולשית תחתונה אם לכל $i<j$, $a_{ij}=0$.

בדומה לתרגיל הקודם ניתן להראות שקבוצת המטריצות המשולשיות תחתונות סגורה לכפל.

מטריצה ריבועית היא משולשית אם היא משולשית עליונה או תחתונה.

הגדרה

העיקבה (trace) של מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מוגדרת ע"י $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$.

תכונות העיקבה

א. $tr(A)=tr(A^t)$.

ב. $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$.

ג. $tr(AB)=tr(BA)$.

הוכחה

א. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נסמן $B=A^t$ ואז $b_{ii}=a_{ii}$ לכל $i=1,\dots,n$ ולכן

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=tr(B).$$

ב. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נסמן $C=A+B$ ואז $c_{ii}=a_{ii}+b_{ii}$.

$$tr\left(C\right)=\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\left(a_{ii}+b_{ii}\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=tr\left(A\right)+tr\left(B\right).$$

ג. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נסמן $C=AB$ ואז $c_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}\Leftarrow tr\left(C\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}\right)$.

נסמן $D=BA$ ואז $d_{ii}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ki}\Leftarrow tr\left(D\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ki}\right)$.

בשדה ניתן להחליף את סדר החיבור והכפל ולכן

$$tr\left(D\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ki}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}b_{ik}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ki}b_{ik}\right)=tr\left(C\right).$$

דוגמא

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\-1&0&3\\0&-2&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&0\\1&2&-1\end{pmatrix}$$

$$tr\left(AB\right)=8\Leftarrow AB=\begin{pmatrix}3&&\\&6&\\&&-1\end{pmatrix}$$

$$tr\left(BA\right)=8\Leftarrow BA=\begin{pmatrix}-1&&\\&0&\\&&9\end{pmatrix}.$$

תרגיל

מטריצת היחידה $I=\left(\delta_{ij}\right)\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מוגדרת ע"י $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$.

הוכח שאין מטריצות $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ עבורן $AB-BA=I$.

פתרון

ראינו ש $tr\left(A+B\right)=tr\left(A\right)+tr\left(B\right),tr\left(AB\right)=tr\left(BA\right)$.

מצד אחד

$$tr\left(AB-BA\right)=tr\left(AB\right)-tr\left(BA\right)=tr\left(AB\right)-tr\left(AB\right)=0.$$

מצד שני

$$tr\left(I\right)=n.$$

מכיוון שמדובר בשדה הממשיים נקבל ש $n\neq 0$ וקיבלנו סתירה.

חזקה

מגדירים חזקות של מטריצות באינדוקציה על $n=0,1,2,...$:

$$A^{n+1}:=A\cdot A^{n},...,A^{2}:=A\cdot A,A^{1}:=A,A^{0}:=I$$

דוגמא

אם $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ אז נקבל ש $A^{n}=\begin{pmatrix}2^{n}&0\\0&2^{n}\end{pmatrix}$.