הגדרה

מכפלה חיצונית ישרה של n חבורות $A_1, A_2, ...A_n$ היא הקבוצה

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ...a_n) : \forall_i a_i \in A_i\}$$

עם כפל

$$(a_1, a_2, ...a_n)(b_1, b_2, ...b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, ...a_n b_n)$$

הגדרה

מכפלה פנימית(מ"פ) ישרה של n ת"ח של חבורה G, $A_1, ...A_n \le G$, מקיימת:

1. $A_i \trianglelefteq G \quad \forall i$
2. $A_i \cap A_1 A_2 \cdots A_{i-1} A_{i+1} \cdots A_n = \{e\} \quad \forall i$
3. $A_1 A_2 \cdots A_n = G$

סימון: $G = \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$

משפט 1

אם $G = \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ אז $G \cong \mathop{\times}_{i=1}^{n} A$

הוכחה: דומה למשפט מהשיעור הקודם(השלם)

משפט 2

תהא G חבורה אבלית מסדר $\prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}$ כאשר

- p_i ראשוניים שונים
- לכל i תהא H_{p_i} ת"ח p_i-סילוא של G

אזי $G \cong \mathop{\times}_{i=1}^{n} H_{p_i}$

הוכחה

לפי משפט 1, מ"ל $G = \bigoplus_{i=1}^{m} H_{p_i}$.

- אכן, מכיוון שG אבלית, כל ת"ח שלה נורמלית ולכן לכל i $H_{p_i} \trianglelefteq G$. כלומר, תנאי 1 מתקיים.

- נוכיח כעת את תנאי 2. יהא $x \in H_{p_i} \cap H_{p_1} \cdots H_{p_{i-1}} H_{p_{i+1}} \cdots H_{p_m}$. מכיוון ש$x$ איבר בH_{p_i}, סדרו מחלק את סדר H_{p_i}, כלומר $o(x) | p_i^{k_i}$(א).

  מאידך, $x \in H_{p_i} \cdots H_{p_{i-1}} H_{p_{i+1}} \cdots H_{p_m}$, מכאן $x = x_1 x_2 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_m$ כאשר לכל i $x_i \in H_{p_i}$. נסמן:

$$N = |H_{p_1}| |H_{p_2}| \cdots |H_{p_{i-1}}| |H_{p_{i+1}}| \cdots |H_{p_m}| = p_1^{k_1} \cdots p_{i-1}^{k_{i-1}} p_{i+1}^{k_{i+1}} \cdots p_m^{k_m} = \frac{|G|}{p_i^{k_i}}$$

  מכיוון שG אבלית,

$$x^N = (x_1 x_2 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_m)^N = x_1^N x_2^N \cdots x_{i-1}^N x_{i+1}^N \cdots x_m^N = (*)$$

  $|H_{p_j}| | N$ לכן $N = |H_{p_j}| \cdot t$, t שלם ולכן $x_j^N = \left(x_1^{|H_{p_i}|}\right)^t = e^t = e$ לכל $1 \le j \le m$, $j \neq i$.

  $\Leftarrow o(x) | N$(ב) $\Rightarrow x^n = e$

  N ו$p_i^{k_i}$ זרים ולכן (א)+(ב) $\Leftarrow o(x) = 1$. כלומר $x = e$. הוכחנו שתנאי 2 מתקיים.

- ברור ש$G \supseteq H_{p_1} H_{p_2} \cdots H_{p_m}$. כדי להוכיח שוויון(כלומר את תנאי 3) מספיק להראות $|H_{p_1} \cdots H_{p_m}| = |G|$.

$$H_{p_1} H_{p_2} \cdots H_{p_m} = \{x_1 x_2 \cdots x_m : \forall_i x_i \in H_{p_i}\}$$

  נניח $x_1 \cdots x_m, y_1 \cdots y_m \in H_{p_1} \cdots H_{p_m}$, $\forall_i x_i, y_i \in H_{p_i}$. אם $x_1 \cdots x_m = y_1 \cdots y_m$ אז(בגלל אבליות)

$$y_1^{-1} x_1 = x_2^{-1} y_2 x_3^{-1} y_3 \cdots x_m^{-1} y_m$$

  לכל i $y_i^{-1} x_i \in H_{p_i}$, מכאן $y_1^{-1} x_1 \in H_{p_1} \cap H_{p_2} \cap ... \cap H_{p_m}$. לפי 2(הוכחנו לעיל). $y_1^{-1} x_1 = e$ ולכן $x_1 = y_1$.

  בדומה מוכיחים $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$,..., $x_m = y_m$

  מכאן, $|H_{p_1} \cdots H_{p_m}| = |H_{p_1}| |H_{p_2}| \cdots |H_{p_m}| = |G|$. סיימנו להוכיח 3 ■

משפט 2

אם G אבלית אז G איזומורפית למ"ח ישרה ת"ח p-סילוא שלה.

משפט 3

תהא G חבורת-p אבלית מסדר p^n.

אז $G \cong \overset{t}{\underset{i=1}{\times}} \mathbb{Z}_{p^{k_i}}$ כאשר $\sum_{i=1}^{t} k_i = n$ ובה"כ $k_1 \ge k_2 \ge k_3 \ge \cdots \ge k_t > 0$

הגדרה

חלוקה של מספר טבעי n היא וקטור של מספרים טבעיים $(k_1, k_2, ...k_t)$ כך ש= $\sum_{i=1}^{t} k_i$ n ו $k_1 \geq k_2 \geq ... \geq k_t$

דוגמה

חלוקות של:

n	
1	(1)
2	$(2), (1,1)$
3	$(3), (2,1), (1,1,1)$
4	$(4), (3,1), (2,2), (2,1,1), (1,1,1,1)$
5	$(5), (4,1), (3,2), (3,1,1), (2,2,1), (2,1,1,1), (1,1,1,1,1)$

דוגמה

מיין חבורות אבליות מסדר 81

תשובה

$$81 = 3^4$$

$$G \cong \mathbb{Z}_{3^4} = \mathbb{Z}_{81}$$

או

$$\mathbb{Z}_{27} \times \mathbb{Z}_3$$

או

$$\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9$$

או

$$\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$$

או

$$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$$