תהי f פונקציה ממשית המוגדרת בסביבה של נק. x^0 ב$\mathbb{R}^k$. הנק. x^0 נקראת נקודת מקסימום מקומי של f אם $f(x) \le f\left(x^0\right)$ לכל x בסביבה של x^0.
באופן דומה מגדירים מינימום מקומי(ע"י היפוך האי שוויון).
נקודת קיצון מקמית של f היא נק. מינימום מקומי או מקסימום מקומי.

תנאי הכרחי לנק. קיצון מקומית בנק' x_0

משפט

תהי f פונקציה ממשית המוגדרת בסביבת נק' קיצון מקומית $x^0 \in \mathbb{R}^k$. נניח ש$\nabla f|_{x^0}$ קיים, אזי $\nabla f|_{x^0} = 0$.

הערה

נק' x^0 שבה $\nabla f|_{x^0} = 0$ נקראת הנק' הקריטית של f.
(לכן: המשפט אומר נק. קיצון מקומית שבה הגרדיינט קיים הוא נק' קריטית).
[נק. היא קיצון ולא קריטית אם היא לא גזירה בנק.]

הוכחה

נקבע i בין 1 לk כלשהו.

$$F_i(x) := f\left(x_1^0, ...x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, ...x_k^0\right)$$

(קיבענו את כל המשתנים במקום המתאים של x^0 ואנו משנים רק את המשתנה i, $i \neq j$, $x_j = x_j^0$, x_i משתנה)
הפונקציה הנ"ל היא פונקציה ממשית עם משתנה אחד(x_i) מוגדרת בסביבה של x_i ב$\mathbb{R}$. היא גזירה בנק. x_i^0(לפי הנתון של כל הנגזרות החלקיות קיימות בנק' x_0). נניח שהקיצון היא מקסימום. $\overset{F_i(x_i)}{f(x)} \le f\left(x^0\right) = F_i\left(x_i^0\right)$ עם x בסביבה של x^0. דהיינו x_i^0 היא נקודת מקסימום(או מינימום) מקומית של F_i ו$F_i'\left(x_i^0\right)$ קיימת. לכן לפי משפט ידוע(לפונקציה של משתנה אחד) $F_i'\left(x_i^0\right) = 0$, ז"א $\forall_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right) = 0$. מש"ל.

הקדמה אלגברית

מטריצה ריבועית A נקראת מוגדרת חיובית אם $hAh^t \ge 0$ לכל ווקטור שורה $(h_1 \quad \cdots \quad h_n)\begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}_{n\times n}\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots \\ h_n\end{pmatrix}$.
היא נקראת מוגדרת שלילית אם $hAh^t \le 0$.
A מוגדרת חיובית $\Leftrightarrow$ $-A$ מוגדרת שלילית. אחרת: אם זה לא לכל h אז אומרים ש A לא מוגדרת.
[hAh^t היא תבנית התבנית הריבועית עם המטריצה A]

דוגמה

מטריצה סימטרית - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

קריטריון למוגדרות חיובית של מטריצה ממשית סימטרית

מטריצה A ממשית וסיטמרית היא מוגדרת חיובית(לחלוטין) אם כל המינורים הראשי-ים שלה אי שליליים. $M_i > 0$. מינור ראשי זה דטרמיננטה סביב לאלכסון.