תורת הגרפים - הרצאה 10

8 בינואר 2012

הגדרה

יהא $G = (V, E)$ גרף.
פונק' $f : E \to \{1, .., k\}$ נקראת k-צביעה.
k-צביעה נקראת כשרה אם לכל שתי צלעות שיש להן קדקד משותף יש צבעים שונים.
אינדקס הצביעה של גרף G הוא:

$$i(G) = \min\{k \ : \ \text{there is a kosher k-coloring of G}\}$$

עובדה 1

לכל גרף סופי G, $i(G) \geq \Delta(G)$ כאשר $\Delta(G)$ דרגה מקסימלית.

הגדרה

לעתים $i(G) > \Delta(G)$.
למשל, במעגל מאורך אי זוגי, $i(G) = 3$, $\Delta(G) = 2$.

תרגיל

חשב $i(K_n)$ עבור $n \leq 7$. נסה להסיק נוסחה כללית ולהוכיח אותה.

משפט 2

אם G גרף דו צדדי d-רגולרי אז $i(G) = d$.

הוכחת משפט 2

ראשית, $i(G) \geq d$ לפי עובדה 1.
צ"ל $i(G) \leq d$. מספיק להוכיח קיימת צביעת צלעות כשרה ב-d צבעים בG.

טענת עזר 1

יהי G גרף דו"צ d-רגולרי, $d \neq 0$ שצדדיו V^1, V^2, אז $|V^1| = |V^2|$.

הוכחה

מתקיים

$$|V^2| \cdot d = |E| = |V^1| \cdot d$$

נחלק ב$d \neq 0$, ונקבל

$$|V^2| = |V^1|$$

טענת עזר 2

לכל $A \subseteq V^1$ מתקיים:

$$|N_G(A)| \geq |A|$$

הוכחה

מס' הצלעות החלות בA הוא $|A| \cdot d$, וזה מס' הצלעות בין A ל$N_G(A)$ $\leq$ מס' הצלעות החלות ב$N_G(A)$ $= d \cdot |N_G(A)|$.
קיבלנו:

$$\begin{aligned} |A| \cdot d &\leq |N_G(A)| \cdot d \\ |A| &\leq |N_G(A)| \end{aligned}$$

המשך הוכחת המשפט

לפי טענת עזר 2, תנאי הול מתקיים.
לפי משפט הול, קיים שידוך מלא מV^1 לV^2 בG.
לפי טענת עזר 1, שידוך זה הוא שידוך מושלם (כלומר חל בכל הקדקדים של G).
לפי הגדרות, לכל 2 צלעות בשידוך אין קדקד משותף. נצבע את צלעות השידוך המושלם של G בצבע d, ונשמיט אותן מהגרף.
נקבל גרף דו"צ. מכיוון שהשידוך מושלם דרגת כל קדקד יורדת ב-1. נקבל גרף דו"צ $(d-1)$-רגולרי. אם $d-1=0$ סיימנו, ואחרת מתקיימות ט.ע 1 ו2, קיים שידוך מושלם בגרף הנותר, נצבע את צלעותיו בצבע $d-1$, וחוזר חלילה עד שנקבל גרף 0-רגולרי, מש"ל.

באופן דומה (אך יותר מתוחכם) ניתן להוכיח:

משפט 3

לכל גרף דו צדדי G, $i(G) = \Delta(G)$.

תרגיל

לכל גרף G:

$$\Delta(G) \leq i(G) \leq 2\Delta(G) - 1$$

משתמשים בגרף קו - $L(G)$, גרף שקדקדיו הם הצלעות של G וצלעותיו הם קדקדי G.

עובדה

$i(G) = \chi(L(G))$.

משפט וידינג - Vizing

לכל גרף סופי G:

$$\Delta(G) \leq i(G) \leq \Delta(G) + 1$$

בעיות קיצון בתורת הגרפים

גרפים מירביים ובעיית טורן

בעיית יסוד

בהינתן גרף F, מצא את המספר המקסימלי של צלעות בגרף פשוט מסדר n שאינו מכיל את F כתת גרף.
גרף שלא מכיל את F נקרא גרף נמנע-F.
לעיתים נחליף את F בקבוצה:

$$\bar{F} = \{F_1,\, F_2,\, ..\}$$

גרף נמנע $\bar{F}$ אם אינו מכיל אף לא אחד מהגרפים $F \in \bar{F}$ כתת גרף.

בעיה

מצא מס' מקס' של צלעות בגרף פשוט מסדר n שנמנע F.
נסמן מספר זה ב$ex\left(n,\, F\right)$ וגרף פשוט נמנע F מסדר n שמס' צלעותיו מקסימלי נקרא גרף מירבי נמנע F.

דוגמה

1. $F = K_2$.
   $ex\left(n,\, K_2\right) = 0$.
   גרף מירבי ללא K_2 הוא גרף ריק.
2. $F = P_3$.
   $ex\left(2n,\, P_3\right) = n$.
   $ex\left(n,\, P_3\right) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.
3. $\bar{F} = \{C_k \ :\ k \geq 2\}$.
   $ex\left(n,\, C_k\right) = n-1$ - גרף מירבי ללא מעגלים הוא עץ.
4. $\bar{F} = \{C_{2k+1},\, k \geq 1\}$.

טענה

$ex\left(n,\, \bar{F}\right) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.
הגרף המרבי הוא גרף דו צדדי סימטרי $K_{\frac{n}{2},\, \frac{n}{2}}$.

הוכחה

גרף הוא ללא מעגלים מאורך אי זוגי $\Longleftrightarrow$ הוא גרף דו צדדי (לפי טענה שהוכחנו בעבר).
לכן, $ex\left(n,\, \bar{F}\right)$ = המס' המקסימלי של צלעות בגרף דו צדדי פשוט מסדר n.
ברור שהגרף המירבי הוא מלא, לכן הוא $K_{m,\, n-m}$ ומס' צלעותיו $m \cdot (n-m)$.
נסמן $x = \frac{n}{2} - m$, ואז הגרף הוא $K_{\frac{n}{2}+x,\, \frac{n}{2}-x}$ ואז מס' הצלעות הוא $\left(\frac{n}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{n}{2} + x\right) = \frac{n^2}{4} - x^2$.
אם n זוגי, מקס' מתקבל כאשר $x = 0$.
אם n אי זוגי, מקס' מתקבל כאשר $x = \frac{1}{2}$.

$$ex\left(n,\, \bar{F}\right) = \begin{cases} \frac{n^2}{4} & n \text{ is even} \\ \frac{n^2}{4} - \frac{1}{4} = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor & n \text{ is odd} \end{cases}$$

בעיית טורן

מצא את $ex\left(n,\, \bar{F}\right)$.

מקרה פרטי של משפט טורן

$$ex\left(n,\,C_3\right)=\left\lfloor \frac{n^2}{4}\right\rfloor$$

גרף מרבי הוא גרף דו צדדי סימטרי.

הוכחת המקרה הפרטי

מספיק להוכית, לפי הטענה הקודמת, את הטענה הבאה:

טענת עזר

לכל גרף ללא משולשים G פשוט מסדר n קיים גרף דו צדדי פשוט H מאותו סדר שמס' צלעותיו מקיים $\left|E\left(H\right)\right|\geq\left|E\left(G\right)\right|$.

הוכחת טענת העזר

תהא V קב' קדקדי G.
יהי $x\in V$ קדקד בG בעל דרגה מקסימלית, כלומר:

$$\forall v\in V\ \ d_G\left(x\right)\geq d_G\left(v\right)$$

תהא W קב' השכנים של x.
נגדיר גרף H דו צדדי מלא שצדדיו W ו$V\backslash W$.
לכל $u\in V\backslash W$ מתקיים:

$$d_H\left(u\right)=\left|W\right|=d_G\left(x\right)\geq d_G\left(u\right)$$

לכל קדקד $u\in W$, מתקיים $N_G\left(u\right)\subseteq V\backslash W$ כי G ללא מעגלים ואם היה לu שכן v בתוך W, אז היה משולש $u-v-x$.
לכן לכל $u\in W$ מתקיים:

$$d_G\left(u\right)=\left|N_G\left(u\right)\right|\leq\left|V\backslash W\right|=d_H\left(u\right)$$

לכן לכל קדקד $u\in V$ מתקיים

$$d_H\left(u\right)\geq d_G\left(u\right)$$

ולכן

$$\left|E\left(H\right)\right|=\frac{1}{2}\sum_{u\in V}d_H\left(u\right)\geq\frac{1}{2}\sum_{u\in V}d_G\left(u\right)=\left|E\left(G\right)\right|$$

הגדרה

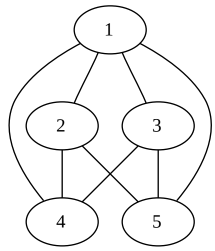
גרף $G=\left(V,\,E\right)$ r-צדדי אם

$$V=\bigsqcup_{i=1}^{r}V^i$$

איחוד זר של r קבוצות (צדדים) ואין צלע בין 2 קדקדים מאותו צד.
גרף r-צדדי הוא מלא אם בין כל 2 קדקדים בצדדים שונים יש צלע.
גרף r-צדדי מלא הוא סימטרי אם לכל צד $1\leq i\leq r$ מתקיים

$$\left|V^i\right|\in\left\{ \left\lfloor \frac{\left|V\right|}{r}\right\rfloor ,\,\left\lceil \frac{\left|V\right|}{r}\right\rceil \right\}$$

גרף טורן $T\left(n,\,r\right)$ הוא גרף r-צדדי מלא סימטרי מסדר n.
לדוגמה, $T\left(5,\,3\right)$:



במקרה זה הקבוצות הן

$$\begin{aligned} V^1 &= \{1\} \\ V^2 &= \{2, 3\} \\ V^3 &= \{4, 5\} \end{aligned}$$

משפט טורן

הגרף $T(n, r)$ הוא גרף נמנע K_{r+1} מרבי.

הערה

זו הכללה של המשפט עבור גרף ללא משולשים.

הוכחה משפט טורן

טענת עזר 1

יהי G גרף פשוט נמנע K_{r+1} מסדר n.
קיים גרף r-צדדי פשוט על אותה קבוצת קדקדים H המקיים שלכל קדקד v מתקיים $d_H(v) \geq d_G(v)$.

הוכחת טענת עזר 1

נוכיח באידנוקציה על r.
אם $r = 1$ זה מובן מאליו.
תהא V קב' הקדקדים של G.
יהא $x \in V$ קדקד שדרגתו מקסימלית.
ז"א, לכל קדקד $v \in V$ מתקיים $d_G(x) \geq d_G(v)$.
תהא $W = N_G(x)$.
נשים לב, הגרף G נמנע K_{r+1}. לכן, תת הגרף המושרה ע"י W נמנע K_r.
לפי הנחת האינדוקציה, יש גרף $(r-1)$-צדדי H_0 על W שמקיים $d_{H_0}(v) \geq d_{G|_W}(v)$ לכל $v \in W$.
יהא H גרף r-צדדי מלא שצדדיו $V \backslash W$ ו$(r-1)$ הצדדים בH_0.
מתקיים:
לכל $v \in V \backslash W$:

$$d_H(v) = |W| = d_G(x) \geq d_G(v)$$

לכל $v \in W$:

$$d_H(v) = d_{H_0}(v) + |V \backslash W| \geq d_{G|_w}(v) + |V \backslash W| \geq d_G(v)$$

לכן זה נכון לכל $v \in V$, מש"ל טענת עזר 1.

לפי טענת עזר 1, יש גרף מרבי ללא K_{r+1} שהוא r-צדדי מלא.
נותר להראות:

טענת עזר 2

גרף r-צדדי מלא פשוט מסדר n בעל מס' מקס' של צלעות הוא $T(n, r)$.

הוכחת טענת עזר 2

יהי G גרף r-צדדי מלא פשוט מסדר n שאינו $T\left(n,\,r\right)$.
יהיו $m_1,\,m_2,\,...,\,m_r$ גדלי הצדדים.
אם G אינו $T\left(n,\,r\right)$ אז הוא אינו סימטרי, לכן קיימים צדדים $i\neq j$ כך ש $m_i-m_j>1$.
נעביר קדקד מצד j לצד i ונשאיר את הגרף מלא.
מס' הצלעות השתנה ב:

$$\begin{aligned}\left(m_i-1\right)\left(m_j+1\right)-m_im_j &= m_im_j+m_i-m_j-1-m_im_j\\ &= m_i-m_j-1>0\end{aligned}$$

כלומר מס' הצלעות גדל, מכאן G לא מירבי, מש"ל טענת עזר 2 והמשפט.