תורת הגרפים - הרצאה 7

11 בדצמבר 2011

צביעה - הגדרה

יהי G גרף, k מס' טבעי.
k-צביעה של קדקדים היא פונק':

$$f:\ V\left(G\right)\rightarrow\left\{ 1,\,2,\,...,\,k\right\}$$

נאמר ש-k-צביעה היא כשרה אם לכל זוג קדקדים שכנים $\left(u,\,v\right)\in E$, $u,\,v\in V$ **מתקיים** $f\left(u\right)\neq f\left(v\right)$, כלומר צבעים של קדקדים שכנים שונים.

הערה

בערך זה (צביעת קדקדים) הגרפים בה"כ פשוטים.

הגדרה

מס' הצביעה של גרף G (המס' הכרומטי של G) הוא המס' הקטן ביותר k עבורו יש ל-G k-צביעה כשרה, ונסמן $\chi\left(G\right)$.

תכונות בסיסיות

טענה 1

$\chi\left(G\right)=1\iff G$ ריק.

טענה 2

יהי G מסדר n.
$G\cong K_{n}$ מלא $\iff\chi\left(G\right)=n$.

טענה 3

יהי T עץ מסדר ≤2, אז $\chi\left(T\right)=2$.

הוכחה

ראשית, $\chi\left(T\right)\geq2$ כי T לא ריק.
נראה ששני צבעים מספיקים - נצבע קדקד כלשהו ב1, את שכניו ב2, את שכניהם ב1 וכך הלאה.
מכיוון שאין מעגלים אין בעיה לצבוע כך (לא תיווצר צביעה סותרת לקדקד מסוים).
במילים אחרות, יהי $v\in V\left(T\right)$, נצבע כל קדקד u בעץ לפי זוגיות המרחק שלו מ-v - אם המרחק זוגי נצבע ב1 ואם המרחק אי זוגי נצבע ב2.

טענה 4

עבור $n\geq3$:

$$\chi\left(C_{n}\right)=\begin{cases}
2 & n\text{ is even}\\
3 & n\text{ is odd}
\end{cases}$$

טענה 5

יהי G גרף וH תת גרף של G אז

$$\chi\left(H\right)\leq\chi\left(G\right)$$

הוכחה

אם $\chi\left(G\right)=k$ אז יש k-צביעה כשרה לG, נצמצם את אותה הצביעה לקדקדי H, הצביעה כשרה גם לH.

מסקנה 6

אם יש בG מעגל מאורך אי זוגי אז $\chi\left(G\right)>2$.

הגדרה

גרף G הוא דו-צביע אם $\chi\left(G\right)\leq2$.

טענה 7

G דו-צביע $\iff$ בG אין מעגל מאורך אי זוגי.

הוכחה

אם יש בG מעגל מאורך אי זוגי אז לפי מסקנה 6, G אינו דו צביע.
אם אין בG מעגל מאורך אי זוגי אז נניח בה"כ שG קשיר (אחרת, נצבע כל רכיב קשירות בנפרד).
יהי v קדקד כלשהו בG. נצבע קדקד u בG ב1 אם המרחק שלו מv זוגי ו2 אם המרחק שלו מv אי זוגי.

טענת עזר

הצביעה הזו כשרה.

הוכחת טענת עזר

אחרת, יש שני קדקדים שכנים שזוגיות המרחק שלהם מv שווה.
אזי אם שני הקדקדים הנ"ל הם $u_1,\,u_2$, ניקח את המעגל

$$u_1...v...u_2u_1$$

וזה מעגל אי זוגי כיוון שסכום המרחקים בין u_1 לv ובין u_2 לv זוגי ואם מוסיפים את הצלע u_2u_1 נקבל מעגל אי זוגי.

הגדרה

גרף $G=\left(V,\,E\right)$ הוא דו צדדי (דו"צ) אם $V=V^1\sqcup V^2$ ו$\left(u,\,v\right)\in E\Rightarrow\left(u\in V^1\wedge v\in V^2\right)\vee\left(u\in V^2\wedge v\in V^1\right)$

הגדרה

גרף G הוא דו"צ מלא אם $V\left(G\right)=V^1\sqcup V^2$ ומתקיים

$$\left(u,\,v\right)\in E\iff u\in V^1\wedge v\in V^2$$

טענה

גרף הוא דו צדדי $\iff$ הוא דו צביע.

הוכחה

אם G דו צדדי וצדדיו V^1, V^2. נצבע את קדקדי V^1 ב1 ואת קדקדי V^2 ב2 וזו צביעה כשרה.
אם G דו צביע, נצבע אותו ב2-צביעה כשרה. קדקדים שצבועים ב1 יהיו בV^1 וקדקדים שצבועים ב2 יהיו בV^2.

בעיה

יהי G גרף נתון. מהו $\chi(G)$?

עובדה

יש אלגוריתם פשוט שיכול לבדוק אם $\chi(G) \le 2$.
אין אלגוריתם יעיל שיכול לתת הערכה סבירה ל$\chi(G)$.

משפט ברוקס (מקרה פרטי)

לכל גרף פשוט סופי G מתקיים

$$\chi(G) \le \Delta(G) + 1$$

דוגמאות בהן $\chi(G) = \Delta(G) + 1$

1. C_n עבור n אי זוגי
2. K_n.

ב$K_{n,n}$ נקבל ש$\Delta(K_{n,n}) = n$ אך $\chi(K_{n,n}) = 2$.

הוכחה (למשפט)

באינדוקציה על סדר הגרף. אם סדר G שווה ל1, G פשוט לכן $G = K_1$.
$\Delta(K_1) = 0$ ו$\chi(K_1) = 1$ לכן המשפט תקף.
נניח נכונות עבור כל גרף פשוט מסדר קטן מn.
יהי G גרף פשוט מסדר n.
יהי $v \in V(G)$. לפי הנחת האינדוקציה:

$$\chi(G \backslash v) \le \Delta(G \backslash v) + 1 \le \Delta(G) + 1$$

נצבע את $G \backslash v$ ב$\Delta(G) + 1$ צבעים בצביעה כשרה.
נותר לצבוע את v. יש לv לכל היותר $\Delta(G)$ שכנים, ויש $\Delta(G) + 1$ צבעים, לכן יש צבע שלא מופיע אצל השכנים שלו כי מספרם קטן ממס' הצבעים. נצבע את v בצבע הזה, ונקבל צביעה כשרה.

בעיה

צבע מפה מדינית בצבעים כך שאין מדינות שכנות הצבועות באותו צבע (שכנות = יש להן גבול משותף בעל אורך חיובי).

שאלה

האם ניתן לצבוע כל מפה מדינית ב-4 צבעים? זו שאלה ששאל סטודנט לג"ג באונ' לונדון.
כעבור כ-20 שנה הוצגה הבעיה ע"י קיילי בכנס.

עובדה

הבעיה שקולה לבעיה הבאה:

בעיה

יהי G גרף מישורי. האם $\chi(G) \le 4$?

השערת 4 הצבעים

לכל גרף מישורי G מתקיים $\chi(G) \leq 4$.
המשפט הוכח בשנת 1976 ע"י אפל-האקן.

משפט 1

לכל גרף מישורי סופי G מתקיים $\chi(G) \leq 6$.

הוכחה

למה

לכל גרף מישורי סופי פשוט G, $\delta(G) \leq 5$.

הוכחת הלמה

נניח בה"כ שG קשיר, אחרת נתייחס לכל רכיב קשירות בנפרד.
יהי G גרף מישורי פשוט קשיר מסדר $n \geq 3$ עם m צלעות. הראנו בשיעור שעבר שמתקיים $m \leq 3n-6$.
אם $\delta(G) \geq 6$ אז

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2}\sum_{v \in V} d(v) \geq \frac{1}{2} n \cdot \delta(G) \\ &\geq \frac{1}{2} n \cdot 6 = 3n \end{aligned}$$

וזו סתירה למה שהראנו בשיעור הקודם, לכן הלמה נכונה.
כעת נוכיח את המשפט באינדוקציה על סדר הגרף.
אם סדר הגרף ≤ 6 סיימנו, כי נצבע כל קדקד בצבע אחר.
נניח נכונות עבור כל גרף מישורי מסדר $> n$.
יהי G גרף מישורי פשוט מסדר n.
יהי v קדקד בG מדרגה מינימלית. לפי הנחת האינדוקציה:

$$\chi(G \backslash v) \leq 6$$

נצבע את $G \backslash v$ ב6 צבעים צביעה כשרה. לv יש לכל היותר 5 שכנים, לכן יש צבע שלא מופיע בשכני v, ובו נצבע את v, וכך נקבל 6-צביעה כשרה.

משפט 2

לכל גרף מישורי סופי פשוט G מתקיים

$$\chi(G) \leq 5$$

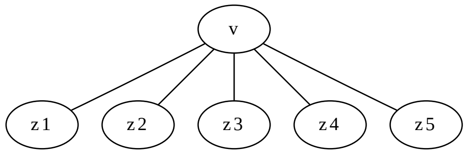
הערה היסטורית

קמפה הוכיח בסוף המאה ה19 את משפט 4 הצבעים. ההוכחה הייתה מוטעית ותוקנה ע"י Heawood, שהוכיח את משפט 5 הצבעים.

הוכחה

נוכיח באינדוקציה על סדר G.
אם סדר $G \leq 5$ ניתן לצבוע אותו ב-5 צבעים, כל קדקד בצבע נפרד. נניח נכונות המשפט עבור כל גרף מישורי פשוט מסדר $\leq n$.
יהי G גרף מישורי פשוט מסדר n. לפי הלמה, $\delta(G) \leq 5$.
יהי v קדקד בG מדרגה ≤ 5.
אם דרגת v> 5 אז סיימנו, כי נצבע את $G \backslash v$ ב5 צבעים וכשנוסיף את v נצבע אותו בצבע שלא מופיע בשכניו.
נניח שדרגת v היא בדיוק 5. נצבע את $G \backslash v$ ב5 צבעים (אפשרי לפי הנחת האינדוקציה).
נתבונן בצבעי שכני v. אם יש שני קדקדים שצבועים באותו צבע, סיימנו כי השתמשנו ב4 צבעים לכל

היותר בשכנים ולכן יש צבע שלא מופיע אצל השכנים של v ובו נצבע את v ונקבל 5-צביעה כשרה.
לכן נניח ששכני v צבועים ב5 צבעים שונים ב5-צביעה הכשרה של $G\backslash v$.
בה"כ, שכני v הם z_i עבור $i = 1, ..., 5$ וz_i צבוע בi.
יתר על כן, G מישורי. נתייחס לשיכון נאות של G במישור.
בה"כ הציור המקומי של v ושכניו נראה כך:



כלומר z_i מסודרים בכיוון מתמטי חיובי מz_1 לz_5 על פי סדר יציאת הצלעות מv.
(ייתכן שיש צלעות בין שכני v).
לכל $1 \leq i < j \leq 5$ נגדיר תת גרף H_{ij} של $G\backslash v$ כך:
H_{ij} הוא תת הגרף המושרה ע"י כל הקדקדים ב$G\backslash v$ הצבועים בi או בj.
כעת יש שתי אפשרויות.

מקרה א':

z_1 וz_3 לא נמצאים באותו רכיב קשירות בH_{13}. במילים אחרות, אין מסילה של קדקדים הצבועים ב1 וב3 מz_1 לz_3.
במקרה זה, נשנה את הצביעה ברכיב הקשירות של z_1 בH_{13} - קדקדים הצבועים ב1 ייצבעו ב3 וקדקדים הצבועים ב3 ייצבעו ב1.
הצביעה שנקבל היא 5-צביעה כשרה של $G\backslash v$, כי לא נוצרים שני קדקדים שכנים הצבועים באותו הצבע.
כעת, יש שני שכנים של v שצבועים באותו הצבע 3, לכן נוכל לצבוע את v ב1 וסיימנו.

מקרה ב':

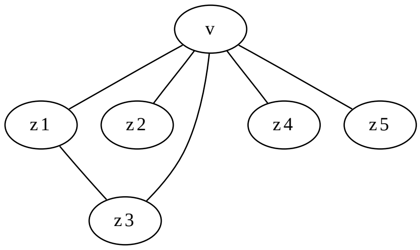
z_1 וz_3 נמצאים באותו רכיב קשירות של H_{13}, אז יש ביניהם מסילה בH_{13}.
במקרה זה נתבונן בH_{24}, וגם פה יש שתי אפשרויות.

מקרה ב' 1:

z_2 וz_4 לא נמצאים באותו רכיב קשירות בH_{24}, עושים את אותו הדבר כמו מקרה א'.

מקרה ב' 2:

z_2 וz_4 נמצאים באותו רכיב קשירות בH_{24}, אז יש ביניהם מסילה בH_{24}.
נשים לב שהנחנו שגם z_1 וz_3 נמצאים באותו רכיב קשירות בH_{13}.
אזי יש מסילה בH_{13} בין z_1 לz_3 ויש מסילה בH_{24} בין z_2 לz_4.
נשים לב - המסילה מz_1 לz_3 עם v יוצרת מעגל:



z_2 וz_4 - אחד מהם בתוך המעגל ואחד מחוצה לו, לכן מסילה מz_2 לz_4 חייבת לחתוך את המעגל הנ"ל.
אבל מדובר בשיכון נאות של גרף מישורי, לכן אין חיתוך צלעות לא טריוויאלי, לכן המסילה חותכת את המעגל בקדקד.
אם הקדקד הוא v, הרי שאינו צבוע בתירה לכך שהוא בH_{24}.
אם הקדקד בH_{13} אז הוא צבוע ב1 או ב3 בסתירה לכך שהוא בH_{24}. לכן, מקרה ב' 2 לא יכול להתקיים בכלל.
לכן סה"כ, המשפט נכון.