בוחן אלגברה לינארית למדעי המחשב

11.5.2015 , כ"ב אייר תשע"ה

מתרגלים: עדי בן צבי, אחיה בר־און, תמר נחשוני.

הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- **כיתבו כל תשובה בדף של השאלה. על כל דף רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא.**
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- ניקוד מקסמאלי: 110 נק'.

מבנה הבחינה:
שאלה 1 ־ שאלת חישוב (מאחורי כל חישוב, עומדת תיאוריה..)
שאלה 2 ־ "שאלה סגורה" (סעיפי נכון/לא נכון וסעיפים שנדרשת תשובה סופית בלבד)
שאלה 3 ־ שאלת הוכח/הפרך ־ 2 סעיפים.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

1	
2	
3	
total	

בהצלחה!

1. נגדיר

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\1&2&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$$

(א) מצא את הפולניום האופיני של A, ע"ע שלה ומרחבים עצמיים. (20 נק')

פתרון : נחשב

$$\begin{aligned}f_A(\lambda)&=|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-1&\lambda-3&-2\\-1&-2&\lambda-1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-1&\lambda-3&-2\\-\lambda&0&\lambda\end{pmatrix}\right|\\&=\lambda\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-1&\lambda-3&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}\right|=\lambda\left|\begin{pmatrix}\lambda-2&-2&-1\\-3&\lambda-3&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\right|\\&=\lambda\left[(\lambda-2)(\lambda-3)-6\right]=\lambda\left[\lambda^2-5\lambda\right]=\lambda^2(\lambda-5)\end{aligned}$$

ולכן ע"ע הם $0,5$.

מרחבים עצמיים: עבור $\lambda=0$

$$N(A-0I)=N(A)$$

$$A\to\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda=0}=\left\{\begin{pmatrix}t\\-t\\t\end{pmatrix}|t\in\mathbb{R}\right\}$$

עבור $\lambda=5$

$$N(A-5I)=N(\begin{pmatrix}-4&2&1\\1&-2&2\\1&2&-4\end{pmatrix})$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}-4&2&1\\1&-2&2\\1&2&-4\end{pmatrix}&\to\begin{pmatrix}1&2&-4\\1&-2&2\\-4&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-4\\0&-4&6\\0&10&-15\end{pmatrix}\\&\to\begin{pmatrix}1&2&-4\\0&-4&6\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-4&6\\0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ולכן

$$V_{\lambda=5} = \left\{ \left(\begin{array}{c} t \\ 2/3t \\ t \end{array} \right) | t \in \mathbb{R} \right\}$$

(ב) האם A לכסינה, אם כן מיהי המלכסנת והמטריצה הדומה לה. (10 נק')
פתרון : A אינה לכיסנה כי ר"א של $\lambda = 0$ הוא 2 ואילו הר"ג הוא 1

.2

(א) ענה תשובות סופיות בלבד! (כל סעיף 10 נק')
נגדיר ה"ל

$$T:\mathbb{R}^{2\times 3}\to\mathbb{R}^2$$

ע"י

$$T(A)=C_1(A)+C_3(A)$$

כאשר $C_i(A)$ פירושו העמודה ה i- ית של A.

i. נגדיר $S=\{e_{1,1},e_{1,2},e_{1,3},e_{2,1},e_{2,2},e_{2.3}\}$ להיות הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2\times 3}$ (כלומר $e_{i,j}$ היא מטריצה שיש בה 1 במקום i,j ואפסים בכל השאר)

ו $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל $\mathbb{R}^2$. מצא את המטריצה המייצגת

$$[T]_B^S$$

פתרון: נסמן $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ מתקיים

$$\begin{aligned}
Te_{1,1} &= T(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1\cdot v_1+0\cdot v_2\\
Te_{1,2} &= \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0v_1+0v_2\\
Te_{1,3} &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1\cdot v_1+0\cdot v_2\\
Te_{2,1} &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=-1\cdot v_1+1\cdot v_2\\
Te_{2,2} &= \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0v_1+0v_2\\
Te_{2,3} &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=-1\cdot v_1+1\cdot v_2
\end{aligned}$$

ולכן

$$[T]_B^S=\begin{pmatrix}1&0&1&-1&0&-1\\0&0&0&1&0&1\end{pmatrix}$$

ii. מצא $\dim KerT$

פתרון: לפי משפט המימדים מתקיים כי

$$\dim KerT = 6 - \dim ImT$$

נראה כי $\dim ImT = 2$(מספיק להראות כי Tעל) ואז $\dim KerT = 4$
יהא $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ אזי המטריצה $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ תקיים $TA = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. כלומר, אכן T על.

(ב) ענה נכון או לא נכון בלבד (ללא נימוק, כל סעיף 10 נק')

i. תהא $T : V \to W$ ה"ל. יהא B בסיס ל V. אזי בהכרח

$$T(B) = \{Tv \mid v \in B\}$$

קבוצה בת"ל.

פתרון: לא נכון. ניקח $T = 0$ העתקת האפס אזי $T(B) = \{0\}$ שהיא קבוצה ת"ל

ii. יהיו $S, T : V \to W$ שתי ה"ל כך ש $ImS \subseteq ImT$ אזי בהכרח כי

$$KerT \subseteq KerS$$

פתרון: לא נכון. למשל $V = \mathbb{R}^2$עם העתקות המוגדרות

$$T(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v$$

$$S(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v$$

אזי

$$ImT = ImS = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

אבל

$$KerT = span\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \nsubseteq pan\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = KerS$$

iii. יהיו $T : V \to W, S : W \to U$ ה"ל כך ש $ImT \subseteq KerS$ אזי בהכרח כי

$$S \circ T$$

היא העתקת האפס.

פתרון: נכון. יהא $v \in V$ אזי $Tv \in ImT \subseteq KerS$ ולכן

$$(S \circ T)(v) = S(T(v)) = 0$$

כלומר $S \circ T$ העתקת האפס.

3. הוכח/הפרך (עם נימוק, כל סעיף 15 נק')

(א) תהא $T : V \to V$ ה"ל אז בהכרח

$$KerT = \{0_V\} \iff KerT^2 = \{0_V\}$$

פתרון: הוכחה

$(\Rightarrow)$ $KerT = \{0_V\}$שקול ל- T חח"ע. זה גורר ש T^2 חח"ע כהרכבה של חח"ע שזה שקול ל $KerT^2 = \{0_V\}$

$(\Leftarrow)$ $KerT^2 = \{0_V\}$שקול ל- T^2 חח"ע. זה גורר ש T חח"ע (הרכבה חח"ע גורר שהפונקציה הימנית חח"ע) שזה שקול ל $KerT = \{0_V\}$

(ב) יהיו $S, T : V \to W$ שתי ה"ל המקיימות $Ker(S+T) \subseteq KerT$ אזי בהכרח

$$KerS \subseteq KerT$$

פתרון: לא נכון. למשל $W = V = \mathbb{R}^2$עם העתקות המוגדרות

$$T(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v$$

$$S(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$$

אזי

$$(T+S)(v) = v$$

ולכן

$$Ker(S+T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq span \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = KerT$$

אבל

$$KerS = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \nsubseteq KerT$$

(פתרון נוסף כללי: ניקח $S = 0, T \neq 0$ אזי התנאי $Ker(S+T) \subseteq KerT$ מתקיים תמיד (כי $S+T = T$) ואילו $KerS = V \subseteq KerT$ לא מתקיים.)