תרגיל בית 3

1. בטופולוגיה, קבוצה A תקרא מושלמת (Perfect set) אם ניתן להתקרב ככל שנרצה לכל $x \in A$ ע"י איברים מ A. במילים אחרות קבוצה היא מושלמת אם אין לה נקודות מבודדות. הראו כי קבוצת קנטור C הינה מושלמת.

2. נניח כי m הינה מידת לבג ו $A \subseteq \mathbb{R}$ הינה קבוצה מדידה בורל כך ש $m(A) > 0$. הוכיחו כי אם

$$B = \{x - y : x, y \in A\}$$

אזי B מכילה קטע פתוח לא ריק סביב 0.

הדרכה:

i. הניחו ללא הגבלת הכלליות כי $0 < m(A) < \infty$. מצאו קבוצה פתוחה G כך ש $A \subseteq G$ וגם $m(A) > \frac{3}{4}m(G)$. הראו כי אז קיים קטע פתוח I כך ש $m(A \cap I) > \frac{3}{4}m(I)$.

ii. הראו כי אם $\delta = \frac{1}{2}m(I)$ נובע כי לכל $x \in (-\delta, \delta)$ הקטע $I \cup \{x + I\}$ מכיל את $A \cap I \cup \{x + A \cap I\}$ ואורכו קטן מ $\frac{3}{2}m(I)$. הסיקו בעזרת הסעיף הקודם כי $A \cap I \cap \{x + A \cap I\} \neq \varnothing$.

iii. הסיקו כי $x \in B$.

3. נניח כי A הינה מדידה לבג ב $\mathbb{R}$ ו

$$B = \bigcup_{x \in A} [x-1, x+1]$$

הוכיחו כי B הינה מדידה לבג.

הדרכה:

i. הסתכלו על $\bigcup_{x \in A} (x-1, x+1)$ והסיקו כי זוהי קבוצה מדידה.

ii. בטאו את $B / \bigcup_{x \in A} (x-1, x+1)$ בעזרת הקבוצה A והסיקו כי גם היא מדידה.

4. שאלת בונוס(קשה): תהי m מידת לבג. בנו תת קבוצת בורל A של $\mathbb{R}$ כך ש

$$0 < m(A \cap I) < m(I)$$

לכל אינטרוול פתוח I .