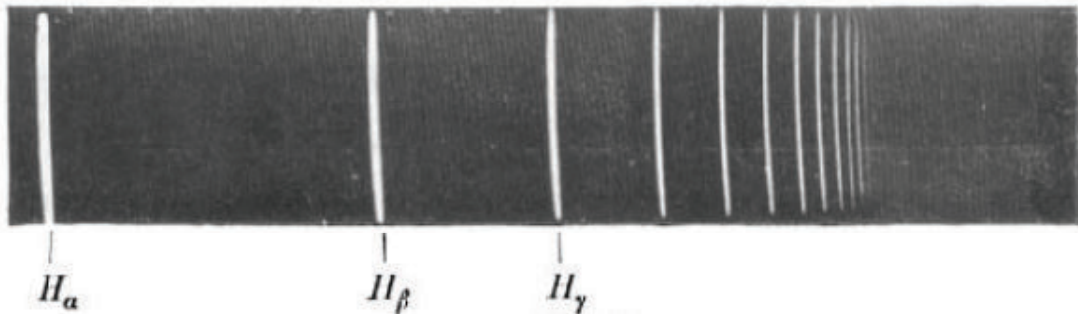


מבוא לפיזיקה מודרנית
מבוא לתורת הקוונטים

מודל האטום הגרעיני

רמות האנרגיה של אטומים ומודל האטום של תומסון

בסוף המאה ה-19 ובתחילה המאה ה-20 נעשו מדידות רבות של הספקטרום (מדידות ספקטרוסקופיות) שנפלט מגזים שהועבר בהם ניצוץ חשמלי או להבה. הניצוץ או הלהבה מעוררים את האטומים, שפולטים קרינה אופיינית – "קוים ספקטרליים" – כפי שראינו בעבר בהדגמה של ספקטרום נורת כספית, וגם עבור קרינת X. כך נראה ספקטרום הפליטה של מימן, למשל:
(מתוך Herzberg, Annalen der Physik 84, 565, 1927)



ב-1885, באלמר (Johann Balmer) גילה שהספקטרום של מימן ניתן לתיאור ע"י הנוסחה

$$\lambda = 364.6 \frac{m^2}{m^2 - 4} \text{ nm}$$

כאשר m מספר טבעי גדול מ-2.

רידברג (Rydberg) קיבל נוסחה שהתאימה ליסודות שונים,

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

כאשר $m < n$ המספרים הטבעיים שבסוגריים מקיימים $n > m$,

והקבוע $R = 1.1 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ נקרא קבוע רידברג.

נוסחה זו עבדה היטב עבור מימן, ודי טוב עבור חלק מקווי הספקטרום של יסודות אחרים, במיוחד האלקליים (ליתיום, נתרן, אשלגן – היסודות בעמודה השמאלית של המערכת המחזורית).

פיזיקאים ניסו לבנות מודלים שונים שמרתם להסביר את הספקטרום. היה ידוע שמטענים פולטים קרינה כאשר הם מתנועעים, והמודלים ניסו לתאר את תנועת המטענים **בתדירות הקרינה**, כפי שהתורה האלקטרומגנטית חוזה.

המודל הפופולרי ביותר היה מודל פודינג השזיפים (או עוגת הצימוקים) אותו ניסח תומסון (מגלה האלקטרון) ב-1898.

במודל זה, אלקטרונים קטנים ושלייליים (השזיפים) הונחו בתור מעין פודינג סמיך שהווה את רוב המסה של האטום ושמטענו החיובי ניטרל את מטען האלקטרונים.

הבעיה היתה שבאמצעות כוחות אלקטרומגנטיים בלבד, אי אפשר היה במודלים מעין אלה לקבל את תנודות האלקטרונים ביחס לפודינג החיובי כך שינתן ספקטרום הקרינה הנמדד.

ניסוי רתרפורד-גייגר-מרסדן

סדרת ניסויים של Rutherford והסטודנטים שלו Geiger ו-Marsden סתמה את הגולל על מודל תומסון ופתחה את הדרך להבנות חדשות לגבי מבנה האטום.

קודם כל, רתרפורד הראה שלפחות שני סוגי קרינה בוקעים מאורניום – הוא קרא להם קרינת α וקרינת β . הוא הראה ש- q/m עבור חלקיקי α שווה לחצי יחס זה עבור אטום מימן מיון (כלומר, שהוצא ממנו האלקטרון).

הוא צבר חלקיקי α במיכל בואקום, ובאמצעות ספקטרוסקופיה הראה שהצטבר במיכל הליום. מכאן הסיק שחלקיקי α הם אטומי הליום מיוננים.

אחרי שידעו מהם חלקיקי ה- α , השתמשו בהם רתרפורד ותלמידיו כדי ללמוד על מבנה האטום באמצעות ניסויי פיזור.

כמעט כל הניסויים הנעשים כיום בפיזיקת החלקיקים ובפיזיקה גרעינית יורשים בעצם מניסויים אלה של רתרפורד.

בניסויים אלה, קרינת α ממקור רדיואקטיבי נופלת על רדיד מתכת דק, שבעברו השני ישנו מסך מאבץ גופריתי, שנותן הבזק אור כאשר פוגע בו חלקיק α , כך שניתן למדוד את זווית הפיזור – הזווית בה הוסט חלקיק ה- α ביחס לכוון תנועתו המקורי.

רוב החלקיקים לא הוסטו כלל, או שעברו פיזור בזווית קטנה של כמעלה בלבד,

כלומר, רוחב התפלגות ההיסטים היה $\theta_{rms} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{n=1}^N \theta_n^2} \sim 1^\circ$, כאשר האינדקס n רץ על-פני כל N הפיזורים שנמדדו.

אך למרבה ההפתעה, היו חלקיקים שהוסטו בזוויות של 90° ויותר. לפי מודל האטום של תומסון, פיזורים כאלה היו צריכים להיות כה נדירים, שאי אפשר היה לצפות בהם כלל.

ננסה להעריך גבול עליון עבור זווית הפיזור שמצפים לה במודל תומסון. מאחר שמדובר בהערכה, רק נרצה את סדר הגודל של הזווית, אז לא נבצע חישוב מדויק ומלא. מתוך הערכה זו נראה שגם כאשר אנו מכופפים את חוקי הפיזיקה כך שתתקבל זווית פיזור גדולה, הערך הגדול ביותר שזווית הפיזור יכולה להיות קטן בהרבה מ- 90° :

התנגשות ה- α עם אלקטרון:

ה- α כבד מהאלקטרון פי 8000 בערך.

בהתנגשות אלסטית חזיתית של חלקיק כבד (מסה m_α) שנע במהירות v עם חלקיק קל (מסה m_e) ניחה, החלקיק הקל מקבל מהירות של כ- $2v$ ומהירות החלקיק הכבד כמעט שאינה משתנה.

השינוי בתנע של החלקיק הכבד שווה בגודלו לשינוי בתנע של החלקיק הקל, שהוא $\Delta p_z = 2m_e v$.

זהו שינוי התנע של החלקיק הכבד בכוון תנועתו המקורי, z .

אם נניח שזוהי שינוי התנע שלו בכיוון הניצב לכיוון התנועה המקורי (כיוון ה-x, כלומר, "נכופף" את חוקי הפיזיקה כך שיתקבל שינוי תנע גדול מהמותר בניצב לכיוון התנועה המקורי), אז נקבל **חסם עליון** עבור שינוי הכוון של תנועת החלקיק הכבד. (זהו חסם עליון כי כשהחלקיק מתפזר ב- 90° , גודל שינוי התנע שלו קטן מאשר כאשר ההתנגשות היא חזיתית.)

אז זווית ההסטה של ה- α מקיימת

$$\tan \theta = \frac{\Delta p_x}{p_z} < \frac{\Delta p_z}{p_z} \approx \frac{2m_e v}{m_\alpha v} = 2 \frac{m_e}{m_\alpha}$$

$$\frac{1}{4000} = 0.014^\circ \text{ יחס זה הוא}$$

כך שהתנגשות של α עם אלקטרון אינה יכולה לתת זווית פיזור גדולה.

התנגשות ה- α עם הפודינג החיובי של האטום:

נעריך את ההסטה בכיוון תנועתו של חלקיק α שמתנגש באטום פודינג שהוא כדור בעל רדיוס R ומטען כולל Q המפוזר באופן אחיד בכדור. הכדור מפעיל את הכוח הגדול ביותר על החלקיק כאשר החלקיק נמצא במרחק R ממרכז הכדור. (עבור מרחק קטן יותר, הכוח גדל כמו $1/r^2$, אבל המטען קטן כמו r^3 , אז בסך הכל הכוח קטן כאשר $r < R$.)

כוח זה הוא הכוח האלקטרוסטטי, $F = \frac{k_E q_\alpha Q}{R^2} = k_E e^2 \frac{z_\alpha Z}{R^2}$, כאשר $q_\alpha = z_\alpha e$ הוא מטען

ה- α , z_α ו- Z הם המטענים של ה- α ושל הגרעין ביחידות המטען היסודי e ,

$$k_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

השינוי בתנע החלקיק בעקבות ההתנגשות הוא מסדר גודל של הכוח כפול הזמן שדרוש לחלקיק לעבור את קוטר הכדור, כלומר,

$$\Delta p \approx F \Delta t = F \frac{2R}{v} = \frac{k_E e^2 z_\alpha Z}{R^2} \frac{2R}{v} = \frac{k_E e^2 z_\alpha Z}{R} \frac{2}{v}$$

ניקח שוב את שינוי התנע הזה להיות כולו בכיוון הניצב לכיוון התנועה, על-מנת לקבל את השינוי הגדול ביותר האפשרי בכיוון התנועה. אז החסם העליון על זווית הפיזור מתקבל מתוך

$$\tan \theta < \frac{\Delta p}{p} \approx \frac{k_E e^2 z_\alpha Z}{R} \frac{2}{v} \frac{1}{Mv} = \frac{k_E e^2 z_\alpha Z}{R} \frac{1}{\frac{1}{2} m_\alpha v^2}$$

$$= \frac{k_E e^2 z_\alpha Z}{R} \frac{1}{E_\alpha}$$

כאשר E_α הוא האנרגיה הקינטית של ה- α .

נעריך את $\tan \theta$ עבור התנגשות של חלקיק α ($z_a=2$), עם אטום זהב ($Z=79$).
נשתמש בכך ש-

$$k_E e^2 = \left(9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \right) (1.6 \times 10^{-19} C)^2$$

$$= 9 \times 10^9 (1.6 \times 10^{-19})^2 \text{ jm} \times \left(\frac{eV}{1.6 \times 10^{-19} \text{ j}} \right) \left(10^{10} \frac{\text{\AA}}{m} \right)$$

$$= 14.4 \text{ eV\AA}$$

אז עבור אנרגיה טיפוסית של ה- α $E_\alpha \sim 5 \text{ MeV}$ ורדיוס אטום של כ- $R \sim 1 \text{ \AA}$, מקבלים

$$\tan \theta < 14.4 \text{ eV\AA} \frac{2 \times 79}{1 \text{ \AA}} \frac{1}{5 \times 10^6 \text{ eV}} = 4.6 \times 10^{-4} = 0.026^\circ$$

כאשר בשוויון האחרון השתמשנו בכך שטנגנס של זווית קטנה שווה בקירוב טוב לזווית עצמה.

אם כן, ההערכה שלנו מוצאת שזווית הפיזור גם מאלקטרון וגם מהחומר החיובי באטום צריכה להיות לכל היותר מסדר גודל של מספר מאיות מעלה.

לכן, פיזור בזווית גדולה מכך צריך להיות תוצאה של פיזורים רבים מאטומים רבים בחומר, כאשר כל פיזור הוא בזווית קטנה ובכוון אקראי (תלוי לאיזה צד של האטום או האלקטרון מתקרב ה- α).

ניתן להראות שעבור מספר פיזורים גדול, הסיכוי לפיזור בזווית גדולה מ- θ הוא $e^{-(\theta/\theta_{rms})^2}$,

כאשר θ_{rms} היא רוחב ההתפלגות של זוויות הפיזור.

מאחר שגייגר ומרסדן מדדו $\theta_{rms} \sim 1^\circ$, נמצא כי הסיכוי לפיזור בזווית של 90° או יותר הוא

$$e^{-(90)^2} = 10^{-3500}$$

לעומת זאת, חלק החלקיקים שמרסדן וגייגר ראו אותם מפוזרים בזווית של למעלה מ- 90° היה כ-

$$1/8000, \text{ מספר גדול בהרבה מ-} 10^{-3500}.$$

המסקנה המתבקשת מחוסר התאמה זה היא שמודל פודינג השזיפים אינו נכון.

סביר להניח שההערכה שלנו של פיזור מאלקטרונים נכונה, כי ידוע שאלקטרונים קיימים בחומר. אז מסיקים שהבעייה עם המודל היא שהפודינג החיובי מפעיל כוח קטן מדי על חלקיק ה- α . צריך למצוא מנגנון שגורם לכוח שמפעיל המטען החיובי להיות חזק יותר.

אז איך אפשר להגדיל את הכוח שמפעיל המטען החיובי על החלקיק?

אם נקבל את ההנחה שהכוח הוא כוח קולון, אז גודלו הוא $F = k_E e^2 \frac{z_\alpha Z}{R^2}$

הגודל היחיד בביטוי זה שאפשר לשנות הוא הרדיוס של התפלגות המטען החיובי: כדי להגדיל את הכוח יש לרכז את המטען החיובי של האטום באזור קטן יותר.

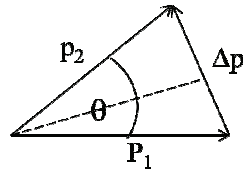
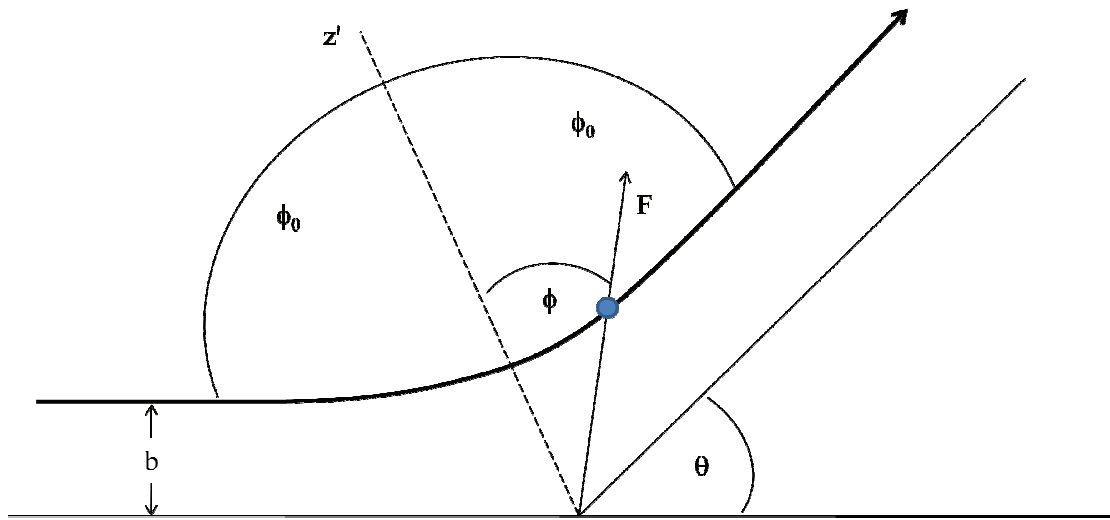
אם כך, תמונת האטום שמתקבלת מניסויים אלה היא זו של גרעין חיובי קטן במרכזו של האטום.

פיזור רתרפורד

אחרי שהסקנו שהמטען החיובי של האטום מרוכז בגרעין קטן, נחשב את תכונות הפיזור של חלקיק α מגרעין האטום.

מאחר שהסקנו כי הגרעין קטן מאוד מהאטום, ניתן להניח כי החלקיק חודר לתוך המטען החיובי לעתים רחוקות מאוד. אז נחשב את הכוח שפועל עליו כאשר הוא עובר ליד הגרעין ומחוצה לו.

מסלול החלקיק תוך שהוא מתפזר על גרעין האטום נראה משהו כזה:



θ היא זווית הפיזור הסופית.

ניתן להבין באינטואיציה כי ככל שמקדם הפגיעה b (impact parameter) קטן יותר, החלקיק יחוש כוח חזק יותר, ויוסט בזווית θ גדולה יותר. כעת נבצע את החישוב שייתן את הקשר בין שני גדלים אלה.

נגדיר את z' להיות הציר שמחלק לשניים את הזווית שמשלימה את θ ל-180 מעלות, כך ש-

$$2\phi_0 + \theta = \pi$$

ϕ היא הקואורדינטה הזוויתית, שנבחר אותה להיות ביחס לציר הסימטריה z' .

ניקח את p_1 להיות וקטור התנע התחילי של החלקיק ואת p_2 להיות התנע הסופי שלו.

נמצא את הקשר בין הזווית ומקדם הפגיעה:

שימו לב בשל הסימטריה, כוח קולון מאיט את החלקיק כל זמן שהוא מתקרב לגרעין, ומאיץ אותו באותה מידה כאשר הוא מתרחק.

חציית הציר z' היא האירוע המבדיל בין שלב ההאטה לשלב ההאצה.

אז רואים כי ציר z' הוא הכוון הממוצע של כוח קולון $\vec{F} = \frac{k_E e^2 z_\alpha Z}{r^2} \hat{r}$ שמפעיל הגרעין על החלקיק.

לכן שינוי התנע $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ הוא וקטור בכוון z' ,

אז כדי לפתור את הבעיה מספיק להתבונן רק רכיב הכוח בכוון זה, כפי שנעשה בהמשך.

מאחר שהאנרגיה הפוטנציאלית של החלקיק כשהוא רחוק מהגרעין זהה לפני ואחרי ההתנגשות,

אז גם **האנרגיה הקינטית נשמרת**, כלומר, $p_2 = p_1 = m_\alpha v$,

כאשר v מהירות החלקיק.

(החלקיק אינו יחסותי: $m \sim 4 \text{ GeV}$, $K \sim 4 \text{ MeV}$)

אז המשולש הנוצר ע"י המשוואה $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ הוא **שווה שוקיים** (ראו ציור למעלה).

נעביר חוצה זווית θ -ל ונקבל את היחס בין הגדלים

$$\frac{\frac{1}{2} \Delta p}{p} = \sin \frac{1}{2} \theta$$

כלומר,

$$\Delta p = 2 p \sin \frac{1}{2} \theta$$

נמצא את שינוי התנע Δp מתוך זה שהוא תוצאה של הרבה שינויים קטנים dp , שכל אחד פועל

על החלקיק במשך זמן קצר dt .

החוק השני של ניוטון נותן:

$$d\vec{p} = \vec{F} dt$$

$$\Delta \vec{p} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F} dt$$

אותנו מעניין הכוח רק בכיוון z' , כי כבר ידוע שרק רכיב זה משנה (הרכיב הניצב ל- z' מתבטל לאורך התנועה).

$$F_z = F \cos \phi \quad \text{כוח זה הוא}$$

אז

$$\Delta p = \int F \cos \phi dt = \int F \cos \phi \frac{dt}{d\phi} d\phi$$

כאשר בשוויון השני המרנו את משתנה האינטגרציה מהזמן לזווית ϕ . כפי שנראה, קל יותר לפתור את הבעיה באמצעות הזווית מאשר באמצעות הזמן.

שימו לב ש- $d\phi/dt$ הוא המהירות הזוויתית של החלקיק סביב הגרעין.

ניתן למצוא את $d\phi/dt$ מתוך הקשר של המהירות הזוויתית לתנע הזוויתי סביב הגרעין המפזר.

תנע זוויתי זה נשמר, משום שהכוח הוא מרכזי.

התנע הזוויתי התחילי הוא $m_\alpha v b$, ובכל רגע אח"כ הוא $m_\alpha r^2 d\phi/dt$ (כלומר, $J=I\omega$).

אז שימור התנע הזוויתי נותן

$$\frac{dt}{d\phi} = \frac{r^2}{vb}$$

נציב יחס זה באינטגרל ונכתוב את כוח קולון מפורשות:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \int_{-\phi_0}^{\phi_0} \frac{k_E e^2 z_\alpha Z}{r^2} \cos \phi \frac{r^2}{vb} d\phi \\ &= \frac{k_E e^2 z_\alpha Z}{vb} \int_{-\phi_0}^{\phi_0} \cos \phi d\phi \\ &= \frac{k_E e^2 z_\alpha Z}{vb} 2 \sin \phi_0 \end{aligned}$$

נשתמש בכך ש- $2\phi_0 = \pi - \theta$,

$$\sin \phi_0 = \sin[(\pi - \theta)/2] = \cos \theta / 2 \quad \text{אז}$$

אז ע"י השוואת שתי המשוואות שקיבלנו עבור שינוי התנע,

$$\Delta p = 2p \sin \frac{1}{2} \theta \quad \text{ו-} \quad \Delta p = \frac{k_E e^2 z_\alpha Z}{vb} 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

$$b(\theta) = \frac{k_E e^2 z_\alpha Z}{m_\alpha v^2} \cot \frac{\theta}{2} \quad \text{נקבל את הקשר בין מקדם הפגיעה וזווית הפיזור.}$$

(שימו לב שהמשוואה הראשונה נובעת משימור אנרגיה קינטית, והשנייה נובעת מהפרטים של האינטראקציה בין הגרעין והחלקיק – כוח פרופורציוני ל- $1/r^2$ ושימור תנע זוויתי.)

עבור התנגשות מסוימת, **אי אפשר לדעת מהו b** , כי אין לנו אפשרות מעשית לראות מה קורה בסקלה תת-אטומית. אבל אנחנו יודעים כי

כל החלקיקים בעלי מקדם פגיעה קטן מערך מסוים $b(\theta)$ יעברו פיזור בזווית גדולה מ- θ .
אבל אפשר לקבוע באופן סטטיסטי לאיזה חלק של החלקיקים יהיה מקדם פגיעה קטן מ- $b(\theta)$. למשל, ברור שלמעט חלקיקים יהיה מקדם פגיעה מאוד קטן.

ע"י ביצוע החישוב הסטטיסטי נוכל לחשב איזה חלק מחלקיקי הקרן הפוגעת אמורים להתפזר בזווית גדולה מ- 90° ולהשוות זאת לתוצאות של גייגר ומרסדן.

חתך הפעולה לפיזור

מושג חשוב שקשור לפיזור הוא חתך פעולה.

זהו גודל פיזיקלי שבא לידי ביטוי בכל ניסוי עם מאיץ חלקיקים, בבליעה של קרינה, בסיכוי לגרימת נזק ביולוגי ע"י קרינה, וכו'.

נניח שפוגעים במטרה בקרן שעוצמתה I_0 חלקיקים ליחידת זמן ליחידת שטח.

אז מספר החלקיקים שביחידת זמן יתפזרו מגרעין אחד בזווית $\theta \leq$ הוא מספר החלקיקים לשניה שהיה להם מקדם פגיעה קטן מ- $b(\theta)$.

מספר זה שווה ל- I_0 כפול שטח העיגול ברדיוס $b(\theta)$, כלומר, $I_0 \pi [b(\theta)]^2$.

הגודל $\sigma(\theta) = \pi[b(\theta)]^2$, שלו ממדים של שטח, נקרא

חתך הפעולה לפיזור בזוית שווה ל- θ או גדולה ממנה.

חתך פעולה זה **מוגדר** כמספר החלקיקים ליחידת זמן שמפוזרים מגרעין אחד בזוית גדולה מ- θ , חלקי עוצמת הקרן.

שימו לב כי נובע מהביטוי של $b(\theta)$, ש- σ הוא תכונה של הפיזיקה של התהליך בלבד, ולא של הקרן או גודל המטרה.

באופן כללי, ניתן להגדיר חתך פעולה לכל תהליך: לפיזור בזוית $\theta \leq$, לפירוק גרעין המטרה, ליצירת חלקיקים חדשים, וכו'. ראו תרגול ושאלות בית.

אמרנו ש- $I_0\sigma$ הוא מספר חלקיקי קרן ה- α שמתפזרים מגרעין אחד ביחידת זמן.

אבל אי אפשר לכוון את הקרן שתפגע דוקא בגרעין מסוים.

לכן יש להשתמש במטרה דבה גרעינים רבים, ואז לא חשוב היכן הקרן פוגעת.

שימו לב שבמטרה אמיתית, החלקיק חש את כוח קולון של מספר גרעינים ויכול להתפזר מכולם.

אך אנו מעוניינים ללמוד את המקרה של פיזור מגרעין אחד, כי שם הפיזיקה הבסיסית.

את האפקט של השפעת גרעינים רבים אפשר להוסיף אחר-כך.

לכן נשתמש בשני קירובים שניתן להשיג אותם במעבדה:

1. כשחלקיק עובר ליד גרעין, כוח קולון של אותו גרעין חזק בהרבה מכוח קולון של גרעינים

אחרים. לכן ניתן להזניח את כוח קולון של הגרעינים האחרים.

2. נשתמש **במטרה דקה מאוד**. אידיאלית, זוהי מטרה בעלת שכבת אטומים אחת. אבל

למעשה, היא בעלת שכבות רבות.

אבל אם המטרה דקה מספיק כך שניתן להזניח את הסיכוי לחפיפה בין מעגלים ברדיוס

$b(\theta)$ סביב גרעינים שונים לאורך מסלול החלקיק דרך המטרה, אז בקירוב טוב החלקיק

יתפזר לכל היותר מגרעין אחד.

אז בקרוב טוב, החלקיק מתפזר מגרעין אחד בלבד, ועלינו רק לכפול את הביטוי לפיזור מגרעין

אחד במספר הגרעינים שבמטרה.

בקרוב זה, מספר חלקיקי הקרן שביחידת זמן יתפזרו בזוית $\theta \leq$ מכל המטרה הוא

$$\frac{dN_{\geq\theta}}{dt} = N_{nucl} I_0 \sigma(\theta)$$

כאשר N_{nucl} הוא מספר הגרעינים במטרה, שנתון ע"י

$$N_{nucl} = n_{nucl} A w$$

כאשר A שטח הקרן שפוגע במטרה, w עובי המטרה,

ו- n_{nucl} הוא צפיפות מספר הגרעינים במטרה – מספר הגרעינים ליחידת נפח. גודל זה מקבלים מ-

$$n_{nucl} = \frac{\rho}{M_{mole}} N_A$$

כאשר N_A הוא מספר אבוגדרו (מספר האטומים במול), ρ הוא צפיפות המסה של חומר המטרה,

ו- M_{mole} המסה המולרית של החומר (המסה של מול מאותו חומר).

$$\frac{dN_{\geq\theta}}{dt} = n_{nucl} w \sigma(\theta) A I_0 \quad \text{אז מספר הפיזורים ליחידת זמן הוא}$$

אם נחלק במספר החלקיקים שפוגעים במטרה ביחידת זמן, $A I_0$,

נקבל את, חלק (שבר, fraction) החלקיקים שמתפזרים בזווית $\theta \leq$: $f_{\geq\theta} = n_{nucl} w \sigma(\theta)$.

נראה מהו חלק זה עבור הניסוי של גייגר ומרסדן:

ניקח מטרת זהב בעובי מיקרון, חלקיקים בעלי אנרגיה קינטית של 5 MeV, ופיזור של 90°

ומעלה.

אז נחשב את פרמטר הפגיעה של חלקיקים אלה ומכאן נמצא את חתך הפעולה לפיזור בזווית זו:

$$\begin{aligned} b &= \frac{k_E e^2 z_\alpha Z}{m_\alpha v^2} \cot \frac{\theta}{2} \\ &= \left(14.4 \text{ eV } \overset{\circ}{\text{Å}} \right) \frac{2 \times 79}{2 \times 5 \times 10^6 \text{ eV}} \\ &= 2.3 \times 10^{-4} \overset{\circ}{\text{Å}} \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בכך ש- $\cot 45^\circ = 1$.

$$\sigma(90^\circ) = \pi b^2 = 1.7 \times 10^{-7} \overset{\circ}{\text{Å}}^2 \quad \text{חתך הפעולה הוא}$$

חתך פעולה ניתן בד"כ ביחידות $\text{barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2 = 10^{-8} \overset{\circ}{\text{Å}}^2$

אז מקבלים

$$\sigma(90^\circ) = 17 \text{ barn}$$

לשם השוואה, במאיץ החלקיקים LHC מעונינים לחקור תהליכים שלהם חתכי פעולה שעשויים להיות קטנים מאוד – מסדר גודל של $\text{picobarn} = 10^{-12} \text{ barn}$.

נמשיך לחשב את חלק הפיזורים בזווית אלה:

$$\begin{aligned} f_{\geq 90^\circ} &= \frac{\rho}{M_{\text{mole}}} N_A w \sigma(90^\circ) \\ &= \frac{19.3 \text{ g/cm}^3}{197 \text{ g/mole}} 6 \times 10^{23} 10^{-4} \text{ cm} 17 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 \\ &\approx 10^{-4} \end{aligned}$$

בהתאמה טובה לתוצאות של גייגר ומרסדן, שמדדו 1/8000 עבור גודל זה.

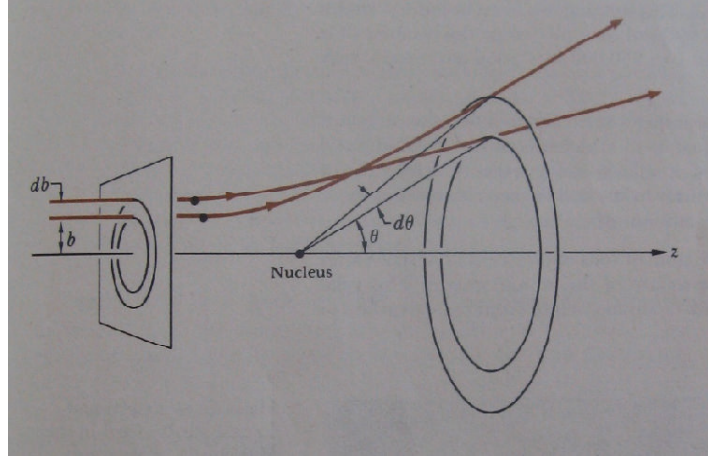
התפלגות זווית הפיזור ומשתנים אחרים

גייגר ומרסדן מדדו גדלים רבים:

- חתך הפעולה הדיפרנציאלי, $d\sigma(\theta)/d\theta$, שהוא ההתפלגות הזוויתית של הפיזורים, כלומר, חלק הפיזורים שבין זווית θ לזווית $\theta+d\theta$
- השתנות מספר הפיזורים כפונקציה של עובי המטרה
- השתנות מספר הפיזורים כפונקציה של חומר המטרה
- השתנות מספר הפיזורים כפונקציה של מהירות החלקיקים (אותם האטו ע"י הנחת לוחות חומר דקים בין המקור והמטרה)
עבור כל הגדלים האלה ניתן לחשב תחזיות.

נחשב את חלק הפיזורים שבין זווית θ לזווית $\theta+d\theta$:

החלקיקים שיתפזרו בזווית אלה הם החלקיקים אשר להם מקדם פגיעה בין b ל- $b+db$ (ציור):



מספר חלקיקים אלה ליחידת זמן שווה לעוצמת הקרן כפול שטח הטבעת שבין b ל- $b+db$,

$$I_0 2\pi b db = \frac{1}{2} \pi I_0 \left(\frac{k_E e^2 z_\alpha Z}{m_\alpha v^2} \right)^2 \frac{\sin \theta d\theta}{\sin^4 \frac{1}{2} \theta} db$$

כאשר גזרנו את b כדי לקבל את db .

$$\frac{d}{d\theta} (\cot \frac{1}{2} \theta) = -\frac{1}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta}$$

הוכחה לתלות הזויתית: נשתמש בכך ש-

אז התלות הזויתית של $b db$ היא

$$b db \propto (\cot \frac{1}{2} \theta) d(\cot \frac{1}{2} \theta) d\theta = -\frac{\cot \frac{1}{2} \theta}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta} d\theta = -\frac{\cos \frac{1}{2} \theta}{2 \sin^3 \frac{1}{2} \theta} d\theta$$

$$= -\frac{\cos \frac{1}{2} \theta \sin \frac{1}{2} \theta}{2 \sin^4 \frac{1}{2} \theta} d\theta$$

כאשר בשוויון האחרון כפלנו את המונה והמכנה ב- $\sin \theta / 2$.

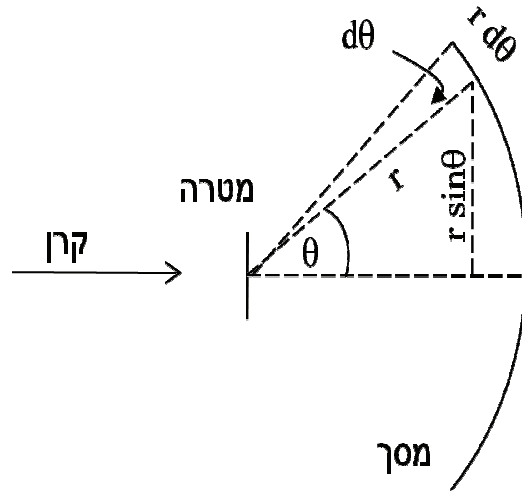
$$\cos \frac{1}{2} \theta \sin \frac{1}{2} \theta = \frac{1}{2} \sin \theta$$

נחליף את המונה:

$$b db \propto -\frac{\sin \theta}{4 \sin^4 \frac{1}{2} \theta} d\theta$$

ואז

חלקיקים אלה יפגעו במסך בטבעת שנמצאת בין רדיוסים $r \sin \theta$ ו- $r \sin(\theta+d\theta)$, כאשר r הוא המרחק בין המטרה המפזרת למסך. (שימו לב: הציור הבא מחליף את ציור 4-10 בספר)



שטחה של טבעת זו (הטבעת שעל המסך) הוא $2\pi r \sin\theta (r d\theta) = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$.
 אז אם נחלק את מספר הפגיעות ליחידת זמן בשטח הטבעת, נקבל את צפיפות הפגיעות המשטחית
 (מספר הפגיעות ליחידת שטח) ביחידת זמן:

$$\frac{\text{פגיעות}}{\text{שטח} \times \text{זמן}} = \frac{1}{4r^2} I_0 \left(\frac{k_E e^2 z_\alpha Z}{m_\alpha v^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{1}{2} \theta}$$

שימו לב ש על-ידי חלוקה זו ב- $\sin \theta$ אנו עוברים להתבונן בחתך הפעולה הדיפרנציאלי לא
 כפונקציה של הזווית θ אלא כפונקציה של הזווית המרחבית

$$, d\Omega = d\phi d \cos \theta = d\phi \sin \theta d\theta$$

כלומר $d\sigma / d\Omega$, שהוא הגודל שבו מציינים חתך פעולה דיפרנציאלי.

הנה טבלת תוצאות מהמאמר של Geiger & Marsden,
(Philosophical Magazine 25, 605, 1913).

610 Dr. H. Geiger and Mr. E. Marsden on the Laws of

TABLE II.
Variation of Scattering with Angle. (Collected results.)

I. Angle of deflexion, ϕ .	II.	III.	IV.	V.	VI.
	$\frac{1}{\sin^4 \phi/2}$	SILVER. Number of scintil- lations, N.	$\frac{N}{\sin^4 \phi/2}$	GOLD. Number of scintil- lations, N.	$\frac{N}{\sin^4 \phi/2}$
150°	1.15	22.2	19.3	33.1	28.8
135°	1.38	27.4	19.8	43.0	31.2
120°	1.79	33.0	18.4	51.9	29.0
105°	2.53	47.3	18.7	69.5	27.5
75°	7.25	136	18.8	211	29.1
60°	16.0	320	20.0	477	29.8
45°	46.6	989	21.2	1435	30.8
37.5°	93.7	1760	18.8	3300	35.3
30°	223	5260	23.6	7800	35.0
22.5°	690	20300	29.4	27300	39.6
15°	3445	105400	30.6	132000	38.4
30°	223	5.3	0.024	3.1	0.014
22.5°	690	16.6	0.024	8.4	0.012
15°	3445	93.0	0.027	48.2	0.014
10°	17330	508	0.029	200	0.0115
7.5°	54650	1710	0.031	607	0.011
5°	276300	3320	0.012

שתי סדרות המדידות בכל טור התבצעו עם מטרות בעוביים שונים.

ניתן לראות שהיחס בין צפיפות הפגיעות ו- $\frac{1}{\sin^4 \frac{1}{2} \theta}$ נשאר כמעט קבוע.

שימו לב שיחס זה אינו קבוע לגמרי, אך קרוב לקבוע עבור 5 סדרי גודל בגדלים המדודים, ולכן מהווה טענה משכנעת לנכונות נוסחת רתרפורד עד כדי דיוק המדידות (שלא דווח במאמר).

שאלת בית: מהי תלות מספר הפיזורים במהירות חלקיקי ה- α שמצאו גייגר ומרסדן (ראו את המאמר שלהם באתר הקורס)? האם תלות זו מתאימה לנוסחאות שפיתחנו בכיתה? חזרו על השאלה עבור עובי המטרה המפזרת.

גודל הגרעין:

ראינו שכדי להסביר את תוצאות ניסויי הפיזור, על גרעין האטום להיות קטן בהרבה מגודל האטום. השאלה הטבעית היא האם גרעין האטום הוא נקודתי או בעל גודל סופי כלשהו?

הדיוק של תלות צפיפות הפיזורים ב- $\frac{1}{\sin^4 \frac{1}{2} \theta}$ מעיד שהגרעין נקודתי

עד כדי המרחק שחלקיקי ה- α מתקרבים אל הגרעין.

כלומר, גם אם הגרעין בעל רדיוס סופי, לחלקיקי ה- α בניסויים שראינו לא היתה מספיק אנרגיה קינטית כדי לחזור באופן משמעותי לתוך הגרעין, כך שהתלות הזויתית תשתנה באופן מזיד.

נחשב את המרחק r הקטן ביותר בין החלקיק למרכז הגרעין במקרה של התנגשות חזיתית (שגורמת לפיזור של 180°),

מתוך שוויון בין האנרגיה הקינטית התחילית (בניח שהיא 5 MeV) והאנרגיה הפוטנציאלית בנקודה הקרובה ביותר לגרעין זהב:

$$\frac{k_E e^2 z_\alpha Z}{r} = \frac{1}{2} m_\alpha v^2$$

$$r = \frac{k_E e^2 z_\alpha Z}{\frac{1}{2} m_\alpha v^2} = \frac{14.4 \text{ eV} \cdot 2 \times 79}{5 \times 10^6 \text{ eV}} = 4.6 \times 10^{-4} \text{ \AA}$$

כלומר, רדיוס הגרעין קטן מגודל זה.

ניתן, כמובן, לבצע את החישוב עבור מקדם פגיעה סופי וזוית פיזור שונה מ- 180° .

ע"י שימוש במטרות בעלות מספר אטומי (Z) קטן יותר, רתרפורד הקטין את מרחק הקרבה המינימלי r .

עבור אלומיניום ($Z=13$), הוא מצא שהתלות הזויתית של הפיזורים היתה שונה באופן משמעותי

$$\frac{1}{\sin^4 \frac{1}{2} \theta} \text{ מ}^{-2}$$

מכאן הסיק רתרפורד כי רדיוס הגרעין הוא בערך $10^{-14} \text{ \AA} = 10^{-14} \text{ m}$.

יחידה שימושית לגדלים מעין אלה היא $10^{-15} \text{ m} = 10^{-5} \text{ \AA} = \text{Fermi} = \text{femtometer} = \text{fm}$.

גודלי הגרעינים הם בתחום של $1-10 \text{ fm}$.

מה פירוש התבדרות חתך הפעולה עבור זווית פיזור של 0?
שימו לב שעבור מקדם פגיעה גדול מאוד (למשל, סנטימטר, מטר, או מיליון קילומטר), כוח קולון קטן מאוד, ולכל זווית הפיזור קטנה מאוד, למעשה 0.
שימו לב גם כי חתך הפעולה מתבדר עבור $b \ll \lambda$ גודל הגרעין, כי $2\pi b db$ גדול מאוד.
לכן לא מפתיע שחתך הפעולה מתבדר עבור זווית פיזור ~ 0 .
אבל באופן מעשי, חתך הפעולה עבור כל זווית שונה מ-0 הוא סופי, כך שאין כאן בעיה אמיתית.