89-198 מתמטיקה בדידה – תרגול 3

תורת הקבוצות (האלמנטרית)

קבוצה היא אוסף של איברים שונים זה מזה.
אין כל חשיבות לסדר האיברים בקבוצה.
אם האיבר x שייך לקבוצה A, נסמן זאת על ידי $x \in A$, אחרת נסמן $x \notin A$.

דוגמה: $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{a,\{a\}\}$.
אז $a \in A, a \in B, \{a\} \in B, \{a\} \notin A$.

הגדרה: הקבוצה הריקה היא קבוצה שבה אין איברים, והיא מסומנת על ידי $\emptyset$.

הגדרה: תהיינה A,B שתי קבוצות.
נאמר שהקבוצה A מוכלת ב B (או A תת קבוצה של B) ונסמן $A \subseteq B$, אם $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$.
אם A אינה מוכלת ב B נסמן $A \nsubseteq B$, כלומר $\exists x(x \in A \wedge x \notin B)$.
שתי קבוצות A,B תיקראנה שוות, ונסמן $A = B$, אם יש להן אותם האיברים, כלומר $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.
אחרת, A,B תיקראנה שונות ונסמן $A \neq B$, כלומר $A \nsubseteq B \vee B \nsubseteq A$.
הקבוצה A מוכלת ממש בקבוצה B (הכלה חזקה) אם $A \subseteq B \wedge A \neq B$. נסמן $A \subset B$ או $A \subsetneq B$.

סימון: $\forall x \in A{:}\, P(x)$ משמעותו $\forall x\big(x \in A \Rightarrow P(x)\big)$.
$\exists x \in A{:}\, P(x)$ משמעותו $\exists x\big(x \in A \wedge P(x)\big)$.

דוגמה: $A = \big\{a,\{a\},b,\{c\}\big\}$.

- $a \in A$
- $\{a\} \in A$
- $\{a\} \subseteq A$
- $\big\{\{a\}\big\} \subseteq A$
- $b \in A$
- $\big\{\{b\}\big\} \nsubseteq A$
- $c \notin A$
- $\{c\} \in A$
- $\{b,c\} \nsubseteq A$

תרגיל: מצא דוגמאות לקבוצות A,B,C המקיימות:
1. $A \in B, B \in C, A \notin C$.
2. $A \in B, B \in C, A \in C$.
3. $A \in B, A \subseteq B$.

תשובה:
1. $A = \{1\}, B = \big\{\{1\},2\big\}, C = \Big\{\big\{\{1\},2\big\},3\Big\}$.
2. $A = \{1\}, B = \big\{\{1\},2\big\}, C = \Big\{\big\{\{1\},2\big\},\{1\}\Big\}$.
3. $A = \{1\}, B = \big\{\{1\},1\big\}$.

תרגיל: תהי A קבוצה כלשהי, הוכח ש $\emptyset \subseteq A$.
הוכחה: $\emptyset \subseteq A$ משמעותו ש $\forall x(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$.
מכיון שלכל x הפסוק $x \in \emptyset$ הוא F, נובע שלכל x הטענה נכונה.

<u>תרגיל</u>: נכון.לא נכון

1. $\emptyset \in \emptyset$. לא נכון
2. $\emptyset \subseteq \emptyset$. נכון
3. $\emptyset \in \{\emptyset\}$. נכון
4. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$. נכון
5. $\{\{\emptyset\}, \emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$. לא נכון

<u>תרגיל</u>: תהיינה P, Q, R קבוצות כלשהן. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

1. $(P \in Q \wedge Q \subseteq R) \Rightarrow P \in R$.
2. $(P \in Q \wedge Q \subseteq R) \Rightarrow P \subseteq R$.
3. $(P \subseteq Q \wedge Q \in R) \Rightarrow P \in R$.
4. $(P \subseteq Q \wedge Q \in R) \Rightarrow P \subseteq R$.

<u>תשובה</u>:

1. הטענה נכונה.
   $Q \subseteq R$ ולכן מהגדרת הכלה $\forall x(x \in Q \Rightarrow x \in R)$.
   מ US נקבל שבפרט עבור P מתקיים $P \in Q \Rightarrow P \in R$.
   כעת ממודוס פוננס, מ $P \in Q \Rightarrow P \in R$ ומ $P \in Q$ נובע $P \in R$.
2. הטענה לא נכונה.
   דוגמה נגדית: $P = \{1\}$, $Q = \{\{1\}, 2\}$, $R = \{\{1\}, 2, 3\}$.
3. הטענה לא נכונה.
   דוגמה נגדית: $P = \{1\}$, $Q = \{1,2\}$, $R = \{\{1,2\}, 3\}$.
4. הטענה לא נכונה.
   דוגמה נגדית: $P = \{1\}$, $Q = \{1,2\}$, $R = \{\{1,2\}, 3\}$.

<u>פעולות על קבוצות</u>

הקבוצה האוניברסלית $\mathcal{U}$ היא קבוצה שמכילה את כל הקבוצות שאיתן אנו עובדים.
זה למעשה העולם שעליו אנו מכמתים.
זו אינה קבוצה קבועה, אלא קבוצה שאנו מגדירים בהתאם לסיטואציה.

<u>הגדרה</u>: תהיינה A, B קבוצות, ותהי $\mathcal{U}$ הקבוצה האוניברסלית.

- האיחוד של A ו B הוא $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.
- החיתוך של A ו B הוא $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.
- ההפרש בין A ל B הוא $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.
- ההפרש הסימטרי של A ו B הוא $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
  באופן שקול ניתן להגדיר $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- המשלים של A הוא $\overline{A} = \mathcal{U} \setminus A = \{x \mid x \notin A\}$ (מסומן לפעמים A^c).

<u>דוגמה</u>: נגדיר $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e\}$ ואת הקבוצות $A = \{a, b, c, d\}, B = \{b, c, e\}$

- $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$.
- $A \cap B = \{b, c\}$.
- $A \setminus B = \{a, d\}$.
- $B \setminus A = \{e\}$.
- $A \triangle B = \{a, d, e\}$.
- $\overline{A} = \{e\}$.
- $\overline{B} = \{a, d\}$.
- $\overline{A \cup B} = \emptyset$.
- $\overline{A \cap B} = \{a, d, e\}$.
- $\overline{A \triangle B} = \{b, c\}$.

<u>דוגמה</u>: נגדיר $\mathcal{U}=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ואת הקבוצות $A=\{1,3,5,7\}, B=\{1,2,4,5,6\}, C=\{2,4,6,8\}$.

- $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$
- $B\cap C=\{2,4,6\}$
- $A\setminus B=\{3,7\}$
- $B\setminus A=\{2,4,6\}$
- $\overline{C}=\mathcal{U}\setminus C=\{1,3,5,7\}=A$
- $\overline{A\cup B}=\mathcal{U}\setminus(A\cup B)=\{8\}$
- $(A\cup B)\setminus C=\{1,3,5,7\}$
- $\overline{A\cup B}\cap\overline{B\cup C}=\{8\}\cap\{3,7\}=\emptyset$
- $(A\cup C)\setminus\left(\overline{C\setminus A}\right)=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\setminus\overline{\{2,4,6,8\}}=\{2,4,6,8\}$

אפשר גם לשים לב כי $A=\overline{C}$ ולכן

$$(A\cup C)\setminus\left(\overline{C\setminus A}\right)=\left(\overline{C}\cup C\right)\setminus\left(\overline{C\setminus\overline{C}}\right)=\mathcal{U}\setminus\left(\overline{C\setminus\overline{C}}\right)=\mathcal{U}\setminus\overline{C}=\overline{\left(\overline{C}\right)}=C=\{2,4,6,8\}$$

<u>זהויות של קבוצות</u>: תהיינה A,B,C קבוצות.

חוק הזהות	$A\cup\emptyset=A$ $A\cap\mathcal{U}=A$	$A\cup\mathcal{U}=\mathcal{U}$ $A\cap\emptyset=\emptyset$
תכונות משלים	$A\cup\overline{A}=\mathcal{U}$ $A\cap\overline{A}=\emptyset$	$\overline{\emptyset}=\mathcal{U}$ $\overline{\mathcal{U}}=\emptyset$
אידמפוטנטיות	$A\cap A=A$	$A\cup A=A$
קומוטטיביות	$A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$	
אסוציאטיביות	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$	
דיסטריביוטיביות	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	
ספיגה	$A\cap(A\cup B)=A$ $A\cup(A\cap B)=A$	
משלים כפול (אינבולוציה)	$\overline{\left(\overline{A}\right)}=A$	
דה מורגן	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$	

<u>סימון</u>: $[n]=\{1,\dots,n\}$.

<u>פעולות על מספר קבוצות</u>: תהיינה $A_1,\dots,A_n$ קבוצות, נסמן $\{A_i\}_{i=1}^n=\{A_1,\dots,A_n\}$

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup\dots\cup A_n=\{x\mid\exists i\in[n]: x\in A_i\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap\dots\cap A_n=\{x\mid\forall i\in[n]: x\in A_i\}$$

תהי I קבוצת אינדקסים, אזי נסמן $\{A_i\}_{i\in I}=\{A_i\mid i\in I\}$

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\{x\mid\forall i\in I: x\in A_i\}\qquad\bigcup_{i\in I}A_i=\{x\mid\exists i\in I: x\in A_i\}$$

<u>דוגמה</u>: $A_1=\{3,5\}, A_2=\{8\}, A_3=\{3,5,7\}, A_4=\{5,9,11\}, A_5=\{8,12,13\}$.

נסמן $I=\{1,3,4\}$. אזי $\bigcup_{i\in I} A_i = A_1\cup A_3\cup A_4=\{3,5,7,9,11\}$ ו $\bigcap_{i\in I} A_i = A_1\cap A_3\cap A_4=\{5\}$.

נסמן $J=\{2,5\}$. אזי $\bigcup_{j\in J} A_j = A_2\cup A_5=\{8,12,13\}$ ו $\bigcap_{j\in J} A_j = A_2\cap A_5=\{8\}$.

<u>תרגיל</u>: עבור $I=\{2,3,4\}$ נגדיר את הקבוצות $A_i=\{i,2i\}, B=\{i,i+1\}$.

א. מהם אברי $\bigcap_{i\in I}(A_i\cup B_i)$?
ב. מהם אברי $\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B_i)$?

<u>פתרון</u>
נשים לב ש $A_2=\{2,4\}, A_3=\{3,6\}, A_4=\{4,8\}$ ו $B_2=\{2,3\}, B_3=\{3,4\}, B_4=\{4,5\}$
א. $\bigcap_{i\in I}(A_i\cup B_i)=(A_2\cup B_2)\cap(A_3\cup B_3)\cap(A_4\cup B_4)=\{2,3,4\}\cap\{3,4,6\}\cap\{4,5,8\}=\{4\}$.
ב. $\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B_i)=(A_2\cap B_2)\cup(A_3\cap B_3)\cup(A_4\cap B_4)=\{2\}\cup\{3\}\cup\{4\}=\{2,3,4\}$.

<u>הערה</u>: תהיינה A,B קבוצות. ניתן להוכיח ש $A=B$ בדרכים הבאות:

- להראות הכלה כפולה, כלומר להוכיח עבור x שרירותי $x\in A\Rightarrow x\in B$ ובנוסף להוכיח $x\in B\Rightarrow x\in A$.
- להוכיח באופן ישיר עבור x שרירותי $x\in B\Leftrightarrow x\in A$ (צריך להראות שכל מעבר הוא אם ורק אם).
- להשתמש בזהויות של קבוצות.

<u>תרגיל שימושי</u>: תהיינה A,B קבוצות. הוכח ש $A\setminus B=A\cap\overline{B}$
<u>הוכחה</u>: יהי x אבר שרירותי.

$$x\in A\setminus B \overset{\text{הגדרת הפרש}}{\Leftrightarrow} x\in A\wedge x\notin B \overset{\text{הגדרת משלים}}{\Leftrightarrow} x\in A\wedge x\in\overline{B} \overset{\text{הגדרת חיתוך}}{\Leftrightarrow} x\in A\cap\overline{B}$$

<u>תרגיל</u>: תהיינה A,B,C קבוצות. הוכח ש $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$
<u>הוכחה</u>:

$$(A\cap B)\setminus(A\cap C) \overset{\text{דוגמה קודמת}}{=} (A\cap B)\cap\overline{(A\cap C)} \overset{\text{דה מורגן}}{=} (A\cap B)\cap(\bar{A}\cup\bar{C}) \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{=}$$
$$\big((A\cap B)\cap\bar{A}\big)\cup\big((A\cap B)\cap\bar{C}\big) \overset{\text{קומוטטיביות}}{=} \big((B\cap A)\cap\bar{A}\big)\cup\big((A\cap B)\cap\bar{C}\big) \overset{\text{אסוציאטיביות}}{=}$$
$$\big(B\cap(A\cap\bar{A})\big)\cup\big((A\cap B)\cap\bar{C}\big) \overset{\text{תכונות משלים}}{=} (B\cap\emptyset)\cup\big((A\cap B)\cap\bar{C}\big) \overset{\text{חוק הזהות}}{=}$$
$$\emptyset\cup\big((A\cap B)\cap\bar{C}\big) \overset{\text{חוק הזהות}}{=} (A\cap B)\cap\bar{C} \overset{\text{אסוציאטיביות}}{=} A\cap(B\cap\bar{C}) \overset{A\setminus B=A\cap\overline{B}}{=} A\cap(B\setminus C)$$

<u>תרגיל</u>: תהיינה A,B קבוצות. הוכח או הפרך:
1. $(A\cup B)\setminus A=B$
2. $A\setminus(A\cap B)=A\setminus B$

<u>פתרון</u>
1. לא נכון, נראה דוגמה נגדית: נסמן $A=B=\{1\}$, אזי $(A\cup B)\setminus A=\{1\}\setminus\{1\}=\emptyset\neq B$.
2. נכון. יהי x אבר שרירותי. נוכיח ש $x\in A\setminus(A\cap B)\Leftrightarrow x\in A\setminus B$:

$$x\in A\setminus(A\cap B) \overset{\text{הגדרת הפרש}}{\Leftrightarrow} x\in A\wedge x\notin A\cap B \Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in A\wedge x\in B) \overset{\text{דה מורגן}}{\Leftrightarrow} x\in A\wedge(x\notin A\vee x\notin B) \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{\Leftrightarrow}$$
$$(x\in A\wedge x\notin A)\vee(x\in A\wedge x\notin B) \overset{\text{חוק המשלים}}{\Leftrightarrow} F\vee(x\in A\wedge x\notin B) \overset{\text{חוק הזהות}}{\Leftrightarrow} x\in A\wedge x\notin B \overset{\text{הגדרת הפרש}}{\Leftrightarrow} x\in A\setminus B$$

<u>תרגיל</u>: תהיינה A,B,C קבוצות. הוכח ש $A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$.

<u>הוכחה</u>:

$$(A\cap B)\triangle(A\cap C)\overset{\text{הגדרת הפרש סימטרי}}{=}\big((A\cap B)\cup(A\cap C)\big)\setminus\big((A\cap B)\cap(A\cap C)\big)\overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{=}$$

$$\big(A\cap(B\cup C)\big)\setminus\big((A\cap B)\cap(A\cap C)\big)\overset{\text{אסוציאטיביות}}{=}\big(A\cap(B\cup C)\big)\setminus\Big(\big((A\cap B)\cap A\big)\cap C\Big)\overset{\text{קומוטטיביות}}{=}$$

$$\big(A\cap(B\cup C)\big)\setminus\Big(\big(A\cap(A\cap B)\big)\cap C\Big)\overset{\text{אסוציאטיביות}}{=}\big(A\cap(B\cup C)\big)\setminus\Big(\big((A\cap A)\cap B\big)\cap C\Big)\overset{\text{אידמפוטנטיות}}{=}$$

$$\big(A\cap(B\cup C)\big)\setminus\big(A\cap(B\cap C)\big)\overset{\text{אסוציאטיביות}}{=}\big(A\cap(B\cup C)\big)\setminus\big(A\cap(B\cap C)\big)\overset{A\setminus B=A\cap\bar{B}}{=}\big(A\cap(B\cup C)\big)\cap\overline{\big(A\cap(B\cap C)\big)}\overset{\text{דה מורגן}}{=}$$

$$\big(A\cap(B\cup C)\big)\cap\big(\bar{A}\cup(\overline{B\cap C})\big)\overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{=}\Big(\big(A\cap(B\cup C)\big)\cap\bar{A}\Big)\cup\Big(\big(A\cap(B\cup C)\big)\cap(\overline{B\cap C})\Big)\overset{\text{קומוטטיביות}}{=}$$

$$\Big(\bar{A}\cap\big(A\cap(B\cup C)\big)\Big)\cup\Big(\big(A\cap(B\cup C)\big)\cap(\overline{B\cap C})\Big)\overset{\text{אסוציאטיביות}}{=}\big((\bar{A}\cap A)\cap(B\cup C)\big)\cup\Big(\big(A\cap(B\cup C)\big)\cap(\overline{B\cap C})\Big)\overset{\text{תכונות משלים}}{=}$$

$$\big(\emptyset\cap(B\cup C)\big)\cup\Big(\big(A\cap(B\cup C)\big)\cap(\overline{B\cap C})\Big)\overset{\text{חוק הזהות}}{=}\emptyset\cup\Big(\big(A\cap(B\cup C)\big)\cap(\overline{B\cap C})\Big)\overset{\text{חוק הזהות}}{=}\big(A\cap(B\cup C)\big)\cap(\overline{B\cap C})\overset{\text{אסוציאטיביות}}{=}$$

$$A\cap\big((B\cup C)\cap(\overline{B\cap C})\big)\overset{A\setminus B=A\cap\bar{B}}{=}A\cap\big((B\cup C)\setminus(B\cap C)\big)\overset{\text{הגדרת הפרש סימטרי}}{=}A\cap(B\triangle C)$$

<u>הגדרה</u>: תהי A קבוצה. קבוצת החזקה של A היא קבוצת כל תתי הקבוצות של A: $P(A)=\{B\mid B\subseteq A\}$.

<u>הערה</u>: לכל קבוצה A מתקיים $A\in P(A)$ ו $\emptyset\in P(A)$.

<u>דוגמה</u>: $P(\emptyset)=\{\emptyset\}$, $P(\{1,2\})=\big\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\big\}$.

<u>משפט</u>: אם בקבוצה A יש n אברים אזי ב $P(A)$ יש 2^n אברים.

<u>תרגיל</u>: הוכח או הפרך

1. $P(A)\triangle P(B)=P(A\triangle B)$
2. אם $A\cap B=\emptyset$ אזי $P(A)\cap P(B)=\{\emptyset\}$

<u>פתרון</u>:

1. לא נכון. נראה דוגמה נגדית. נסמן $A=\{1,2\},B=\{2,3\}$ ונקבל
   - $P(A)=\big\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\big\}$
   - $A\Delta B=\{1,3\}$
   - $P(B)=\big\{\emptyset,\{2\},\{3\},\{2,3\}\big\}$
   - $P(A\triangle B)=\big\{\emptyset,\{1\},\{3\},\{1,3\}\big\}$
   - $P(A)\triangle P(B)=\big\{\{1\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\}\big\}$
2. נכון, לפי contrapositive, נוכיח שאם $P(A)\cap P(B)\neq\{\emptyset\}$ אזי $A\cap B\neq\emptyset$. נניח ש $P(A)\cap P(B)\neq\{\emptyset\}$.
   אזי $P(A)\cap P(B)=\emptyset$ או שקיימת $S\in P(A)\cap P(B)$ כך ש $S\neq\emptyset$.
   נראה שהטענה $P(A)\cap P(B)=\emptyset$ לא יכולה להתקיים:
   מכיון ש $\emptyset\in P(A)$ וגם $\emptyset\in P(B)$ מתקיים $\emptyset\in P(A)\cap P(B)$, ולכן $P(A)\cap P(B)\neq\emptyset$.
   לפי סילוגיזם דיסיונקטיבי נקבל שקיימת $S\in P(A)\cap P(B)$ כך ש $S\neq\emptyset$.
   מהגדרת חיתוך $S\in P(A)\wedge S\in P(B)$.
   מהגדרת קבוצת חזקה $S\subseteq A\wedge S\subseteq B$.
   מהגדרת הכלה $(\forall x\in S{:}\,x\in A)\wedge(\forall x\in S{:}\,x\in B)$.
   מחוק הפישוט נובע $\forall x\in S{:}\,x\in A,\forall x\in S{:}\,x\in B$.
   מכיון ש $S\neq\emptyset$ קיים $x_0\in S$, ומ US נקבל $x_0\in A$ ובנוסף $x_0\in B$.
   מחוק החיתוך נובע $x_0\in A\wedge x_0\in B$.
   מהגדרת חיתוך נקבל $x_0\in A\cap B$, כלומר $A\cap B\neq\emptyset$.

שיטות הוכחה

על מנת להוכיח משפט מתמטי, בדרך כלל אנו מתחילים עם מספר הנחות ומסיקים מהם את הטענה המבוקשת.
בפרק זה נדון במספר אסטרטגיות נפוצות להוכחת משפטים מתמטיים.

<u>אסטרטגיה 1</u> (הוכחה בצורה ישירה):
על מנת להוכיח טענה מהצורה $p \Rightarrow q$, נניח ש p נכון ונוכיח ש q נכון.

<u>אסטרטגיה 2</u> (הוכחה ב contrapositive):
על מנת להוכיח טענה מהצורה $p \Rightarrow q$, נניח ש $\neg q$ נכון ונוכיח ש $\neg p$ נכון.

<u>קצת רקע לא פורמלי בתורת המספרים</u>: קבוצת המספרים הטבעיים היא הקבוצה $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$.
בהינתן שני מספרים טבעיים m,n נאמר ש m מחלק את n, ונסמן $m \mid n$, אם קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש $n = m \cdot k$.
למשל $3 \mid 12$ מכיון ש $12 = 3 \cdot 4$ ו $4 \in \mathbb{N}$.
נאמר ש m לא מחלק את n, ונסמן $m \nmid n$, אם לא קיים מספר טבעי k כך ש $n = m \cdot k$, למשל $5 \nmid 12$.
נשים לב שעבור $n \neq 0$ אם $m \mid n$ אזי בהכרח $m \leq n$.
מספר טבעי $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ הוא ראשוני אם המחלקים היחידים שלו הם $1,n$.

<u>תרגיל</u>: יהי n מספר טבעי. הוכח שאם $n > 2$ מספר ראשוני אזי n אי זוגי.

<u>רעיון ההוכחה</u>:
נסמן "$n > 2$ מספר ראשוני" ב $P(n)$, ו "n אי זוגי" ב $Q(n)$, אנחנו נדרשים להוכיח $P(n) \Rightarrow Q(n)$.

נתונים	מטרה
n מספר טבעי	אם $n > 2$ מספר ראשוני אזי n אי זוגי

בעזרת אסטרטגיה 1, נוסיף את $P(n)$ להנחות ונוכיח את $Q(n)$.

נתונים	מטרה
n מספר טבעי $n > 2$ מספר ראשוני	n אי זוגי

כעת, מכיון ש n מספר ראשוני, המחלקים היחידים של n הם $1,n$.
מכיון ש $n > 2$ נובע ש 2 לא מחלק את n, ולכן n הוא אי זוגי.

<u>הוכחה</u>: יהי n מספר טבעי, ונניח ש $n > 2$ מספר ראשוני.
מכיון ש n מספר ראשוני, המחלקים היחידים שלו הם $1,n$.
בפרט, מכיון ש $n > 2$ נובע ש 2 לא מחלק את n. לכן n הוא אי זוגי.

<u>תרגיל</u>: יהי n מספר טבעי. הוכח שאם 5 לא מחלק את n^2, אז 5 לא מחלק את n.

<u>רעיון ההוכחה</u>:
נסמן "$5 \nmid n$" ב $P(n)$, אנחנו נדרשים להוכיח $P(n^2) \Rightarrow P(n)$.

נתונים	מטרה
n מספר טבעי	$(5 \nmid n^2) \Rightarrow (5 \nmid n)$

בעזרת אסטרטגיה 2, נוסיף את $\neg P(n)$ להנחות ונוכיח את $\neg P(n^2)$.

נתונים	מטרה
n מספר טבעי $5 \mid n$	$5 \mid n^2$

כעת, מכיון ש $5 \mid n$ קיים מספר טבעי m כך ש $n = 5m$.
$n^2 = n \cdot n = 5m \cdot 5m = 5 \cdot 5m^2$, כלומר $5 \mid n^2$.
<u>הוכחה</u>:
יהי n מספר טבעי, נוכיח שאם $5 \nmid n^2$ אזי $5 \nmid n$ ב Contrapositive.
נניח ש $5 \mid n$ ונוכיח ש $5 \mid n^2$.
מכיון ש $5 \mid n$ קיים מספר טבעי m כך ש $n = 5m$.
נקבל ש $n^2 = n \cdot n = 5m \cdot 5m = 5 \cdot 5m^2$. מכיון ש $5m^2 \in \mathbb{N}$ נקבל ש $5 \mid n^2$.
נובע מכך שאם $5 \nmid n^2$ אזי $5 \nmid n$.

<u>תרגיל</u>: יהי n מספר טבעי. הוכח שאם n הוא סכום של שני מספרים טבעיים עוקבים אזי n אי זוגי.

<u>רעיון ההוכחה</u>:
נסמן "n סכום של שני מספרים עוקבים" ב $P(n)$, ו "n אי זוגי" ב $Q(n)$,
אנחנו נדרשים להוכיח $P(n) \Rightarrow Q(n)$.

נתונים	מטרה
n מספר טבעי	אם n סכום של שני מספרים עוקבים אזי n אי זוגי

בעזרת אסטרטגיה 1, נוסיף את $P(n)$ להנחות ונוכיח את $Q(n)$.

נתונים	מטרה
n מספר טבעי n סכום של שני מספרים עוקבים	n אי זוגי

מההנחות קיים מספר טבעי m כך ש $n = m + (m + 1)$ כלומר $n = 2m + 1$.

<u>הוכחה</u>: יהי $n \in \mathbb{N}$.
נניח ש n הוא סכום של שני מספרים עוקבים, כלומר קיים מספר טבעי m כך ש $n = m + (m + 1)$.
נסכום ונקבל ש $n = 2m + 1$.
$2m$ הוא זוגי, ולכן $2m + 1$ הוא אי זוגי, כלומר n הוא אי זוגי.

<u>תרגיל</u>: יהיו n, m מספרים טבעיים. הוכח שאם $m \mid n$ וגם $n \mid m$, אזי $m = n$.

<u>רעיון ההוכחה</u>:
נסמן "$n \mid m$" ב $P(n, m)$ ו "$n = m$" ב $Q(n, m)$,
אנחנו נדרשים להוכיח $\big(P(n, m) \land P(m, n)\big) \Rightarrow Q(n, m)$.

נתונים	מטרה
$n, m \in \mathbb{N}$	$\big((n \mid m) \land (m \mid n)\big) \Rightarrow (n = m)$

בעזרת אסטרטגיה 2, נוסיף את $\neg Q(n, m)$ להנחות ונוכיח את $\neg\big(P(n, m) \land P(m, n)\big)$.

נתונים	מטרה
$n, m \in \mathbb{N}$ $n \neq m$	$\neg\big((n \mid m) \land (m \mid n)\big)$

מדה מורגן נקבל ש $(n \nmid m) \lor (m \nmid n) \equiv \neg\big((n \mid m) \land (m \mid n)\big)$.

נתונים	מטרה
$n, m \in \mathbb{N}$ $n \neq m$	$(n \nmid m) \lor (m \nmid n)$

מכיון ש $n \neq m$ יש שני מקרים אפשריים:

- מקרה 1: $n < m$, במקרה זה $m \nmid n$.
- מקרה 2: $m < n$, במקרה זה $n \nmid m$.

ונקבל ש $(n \nmid m) \lor (m \nmid n)$.

<u>הוכחה</u>:
יהיו $n, m \in \mathbb{N}$. נוכיח ש $(n = m) \Rightarrow \big((n \mid m) \land (m \mid n)\big)$ ב Contrapositive.
נניח ש $m \neq n$, כלומר $n < m$ או $m < n$.
<u>מקרה 1</u>: אם $n < m$ אזי $m \nmid n$, ומחוק החיבור נקבל $(n \nmid m) \lor (m \nmid n)$.
<u>מקרה 2</u>: אם $m < n$ אזי $n \nmid m$, ומחוק החיבור נקבל $(n \nmid m) \lor (m \nmid n)$.
לפי דה מורגן $(n \nmid m) \lor (m \nmid n)$ שקול ל $\neg\big((n \mid m) \land (m \mid n)\big)$.
נובע מכך שאם $m \mid n$ וגם $n \mid m$, אזי $m = n$.