תמר בר-און.
$tamarnachshoni@gmail.com$
$math-wiki.com$
יהיו סיכומי שיעורים והקלטות.
בוחן ומבחן (בוחן מגן).
שיעורי בית- לא להגשה. חשוב מאוד.
הגדרה: תהי A קבוצה. סדר חלקי על A הוא אוסף זוגות $R \subseteq A \times A$ שמקיים:
1. אנטי- רפלקסיביות- $\forall a \in A : (a,a) \notin R$
2. טרנזיטיביות: $\forall a,b,c \in A : [(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R] \rightarrow (a,c) \in R$.
אם A קבוצה וR יחס סדר חלקי על A, אז $\langle A, R \rangle$ היא "קבוצה סדורה חלקית" (קס"ח).
סימון: אם $(a,b) \in R$ מסמנים: aRb.
הרבה פעמים במקום R נקרא ליחס " $<$ ". ואז יהיה לנו $a < b$.
דוגמאות: 1. $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ הן קבוצות סדורות חלקית עם היחס " $<$ " האמיתי.
כלומר:

$$1 < 2, 2 < 3$$

למשל (נכון בכל הקבוצות)
2. $(\mathbb{N}, R)$ יחס החלוקה (מחלק ממש) היא קבוצה סדורה חלקית. למשל

$$2R4$$

אז $(2,4) \in R$.
אבל $(2,5) \notin R$.
3. יחס ההכלה: תהי A קבוצה של קבוצות, אז אפשר לקחת את האוסף של כל הזוגות (B,C),
כך ש

$$B \subsetneq C$$

4. תהי A קבוצה של פונקציות (לא בהכרח עם אותו תחום וטווח!)
ניזכר כי פונקציה היא בעצם קבוצה של זוגות.
ולכן אפשר להשתמש ביחס ההכלה.
זה שקול להגיד את הדבר הבא:
נגיד ש$f < g$ אם $dom(f) \subset dom(g)$ ו

$$g|_{dom(f)} = f$$

הגדרה: תהי $\langle A, R \rangle$ קס"ח. נגיד שA סדורה קווית אם לכל $a,b \in A$ מתקיים אחד מהבאים:

$$a = b \vee aRb \vee bRa$$

דוגמאות:
1. $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ עם היחס "קטן" הרגיל היא קבוצה סדורה קווית.
2. $\langle \mathbb{N}, R \rangle$ הטבעיים עם יחס החלוקה. למשל $2,3$.

הערה: אם R הוא יחס סדר חלקי אז הוא גם אנטיסימטרי. כלומר, אם $(a,b) \in R$ אז בהכרח $(b,a) \notin R$.

הוכחה: נניח בשלילה שיש $a,b \in A$ כך ש$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R$. אז מטרנזיטיביות $(a,a) \in R$, סתירה לאנטי רפלקסיביות.

תרגיל (קשה): מצאו תת קבוצה סדורה קווית של $P(\mathbb{N})$ עם יחס ההכלה, מעוצמה $\aleph$.

הוכחה: תהי $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ פונקיה חח"ע ועל.

לכל $a \in \mathbb{R}$, נגדיר $B_a = \{x \in \mathbb{Q}, x < a\}$.

לכל $a < b \in \mathbb{R}$ מתקיים ש $B_a \subseteq B_b$ - ברור. אבל ידוע שקיים $q \in \mathbb{Q}$ כל ש $a < q < b$. ולכן $q \in B_b \notin B_a$. כלומר, $B_a \subset B_b$. קיבלנו אוסף של תתי קבוצות של $\mathbb{Q}$, מעוצמה $\aleph$ כי לכל מספר ממשי התאמנו קבוצה. ובין כל שניים שונים יש יחס הכלה ממש. (אחד מוכל ממש בשני).

האוסף שנקח יהיה

$$\{f^{-1}[B_a] : a \in \mathbb{R}\}$$

זאת תת קבוצה סדורה קווית מעוצמה $\aleph$.

הגדרה: תהי $\langle A, < \rangle$ קס"ח. נגיד ש $B \subseteq A$ היא "קופינלית/שולטת/דומיננטית" בA, אם

$$\forall a \in A \exists b \in B : [a = b \vee a < b]$$

דוגמאות:

1. לכל $\langle A, < \rangle$ קס"ח, A היא תת קבוצה שולטת.
2. הזוגיים בטבעיים (עם היחס קטן הרגיל).
3. הראשוניים בטבעיים
4. $\mathbb{N}$ ב$\mathbb{R}$.
5. ב$P(\mathbb{N})$ עם יחס ההכלה, האוסף של כל תתי הקבוצות האינסופית.
6. ב$P(\mathbb{N})$ עם יחס ההכלה, $\{\mathbb{N}\}$.

הגדרה: תהי $\langle A, < \rangle$ קס"ח.

1. $a \in A$ נקרא "איבר אחרון/מקסימום/גדול ביותר" אם לכל $b \in A$ מתקיים

$$b < a \vee a = b$$

2. $a \in A$ נקרא "איבר ראשון/מינימום/קטן ביותר" אם לכל $b \in A$ מתקיים

$$b > a \vee a = b$$

תרגיל: תהי $\langle A, < \rangle$ קס"ח. $\{a\}$ שולט אמ"ם a הוא איבר גדול ביותר.

הוכחה: נניח $\{a\}$ שולט. יהי $b \in B$. קיים איבר ב$\{a\}$ ששווה לb או גדול ממנו. והאיבר הזה חייב להיות a.

כיוון שני: נניח a גדול ביותר. וניקח $b \in B$. אז האיבר $a \in \{a\}$ יעשה אצת העבודה, ולכן $\{a\}$ שולט.

תרגיל: תהי $\langle A, < \rangle$ קס"ח סדורה קווית בלי איבר גדול ביותר, אז $B \subseteq A$ שולטת אמ"ם B לא חסומה מלעיל.

(תזכורת: נגיד ש$B \subseteq A$ חסומה מלעיל, אם קיים $a \in A$ כך שלכל $b \in B$,

$$(a > b \vee a = b$$

הוכחה: נניח שB שולטת. נוכיח שהיא לא חסומה מלעיל. נניח בשלילה שהיא חסומה מלעיל. יהי a חסם מלעיל שלה. a לא גדול ביותר, כי נתון שאין איבר גדול ביותר בA. אז יש $c \in A$ כך ש

$$a \neq c \wedge a \not> c$$

בגלל שA סדורה קווית אז $a < c$.

נתון שB שולטת. אז קיים $b \in B$ כך ש$b = c \vee b > c$. אז זה אומר ש$b > a$. סתירה לכך שa חסם מלעיל של B.

בכיוון השני, נניח שB לא חסומה. יהי $a \in A$. a לא חסם מלעיל של B, לכן קיים איבר $b \in B$ כך שלא מתקיים

$$a > b \vee a = b$$

מכיוון שA סדורה קווית, אז $a < b$.

כלומר, B שולטת.

הגדרה: יהיו $\langle A, < \rangle, \langle B, <' \rangle$ קבוצות סדורות חלקית.

ותהי $f : A \to B$.

נגיד שf שומרת סדר אם לכל $a_1 < a_2 \in A$

$$f(a_1) <' f(a_2)$$

תרגיל: הוכיחו או הפריכו: שכל פונקציה שומרת סדר היא חח"ע.

הפרכה: נקח $A = \{a_1, a_2\}$ והיחס הריק, ו$B = \{b\}$ והיחס הריק. והפונקציה הקבועה.

תרגיל: תהי $\langle A, < \rangle$ סדורה קווית ו$\langle B, <' \rangle$ קס"ח, ו$f : A \to B$ פונקציה שומרת סדר. הוכיחו שf חח"ע.

הוכחה: נניח בשלילה שיש $a_1, \neq a_2 \in A$ כך ש$f(a_2) = f(a_1)$. בגלל שA סדורה קווית, יש בינהם יחס כלשהו. בה"כ $a_2 < a_1$. בגלל שf שומרת סדר, אז $f(a_1) < f(a_2)$ בסתירה לאנטי רפלקסיביות.

תרגיל: תהי $\langle A, < \rangle$ סדורה קווית ו$\langle B, <' \rangle$ קס"ח, , ו$f : A \to B$ פונקציה שומרת סדר ועל. האם B גם סדורה קווית?

הוכחה: יהיו $b_1, b_2 \in B$. יש להם מקורות (יחידים). נסמן $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2$. בין a_1 לa_2 יש יחס, ומכייון שf שומרת סדר, היחס עובר גם לתמונות.

תרגיל: תהי $\langle A, < \rangle$ קס"ח ו$\langle B, <' \rangle$ קס"ח ו$f : A \to B$ שומרת סדר חח"ע ועל. יש $f^{-1} : B \to A$. האם f^{-1} שומרת סדר?

הפרכה: נקח $A = \{a_1, a_2\}$ והיחס הריק, ו$B = \{1, 2\}$ והיחס $1 < 2$.

$$f(a_1) = 1, f(a_2) = 2$$

שומרת סדר באופן ריק. חח"ע ועל. ההופכית לא שומרת סדר.

תרגיל: כנ"ל עבור A סדורה קווית.

הוכחה: יהיו $b_1, b_2 \in B$. יש בינהם יחס, כי כבר הוכחנו שאם A סדורה קווית ויש פונקציה שומרת סדר ועל ממנה לB, אז גם B סדורה קווית. בה"כ $b_1 < b_2$. $f^{-1}(b_1) = a_1 . f^{-1}(b_2) =$ a_2.

מכיוון שA סדורה קווית, יש יחס בין a_1 לa_2. וf שומרת סדר אז היא שומרת על היחס הזה.

1. אם $a_1 = a_2$ אז $b_1 = b_2$ (סתירה).
2. אם $a_1 > a_2$ אז $f(a_1) > f(a_2)$ - סתירה.

לכן בהכרח $a_1 < a_2$. כלומר, היחס נשמר תחת f^{-1}.

הגדרה: יהו $\langle A, < \rangle$ ו$\langle B, <' \rangle$ קס"חים. ו$f : A \to B$. נגיד שf איזומורפיזם סדר, אם היא שומרת סדר, חח"ע ועל וההופכית שלה שומרת סדר.

נגיד ש$\langle A, < \rangle$ ו $\langle B, <' \rangle$ איזומורפיים סדר אם יש בינהם איזומורפיזם סדר.

ונסמן

$$\langle A, < \rangle \cong \langle B, <' \rangle$$

הערה: אם $\langle A, < \rangle$ סדורה קווית ו$\langle B, <' \rangle$ אז נגיד ש$f : A \to B$ היא איזומורפיזם סדר, אם היא שומרת סדר ועל.

הגדרה: תהי $\langle A, < \rangle$ קס"ח סדורה קווית. נגיד שהיא צפופה, אם לכל $a < b \in A$ קיים $c \in A$ כך ש

$$a < c < b$$

דוגמאות: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$

דוגמאות נגדיות: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

משפט: כל קס"ח סדור קווי, בן מניה, צפוף, בלי איבר ראשון ואחרון, הוא איזומורפי סדר ל$\mathbb{Q}$ עם היחס קטן הרגיל.

למה: תהי $\langle A, < \rangle$ קס"ח לא ריקה. ויהיו $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ תתי קבוצות שולטות בA. אזי קיימת תתי קבוצה סדורה קווית B כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $B \cap D_n \neq \emptyset$.

הוכחה: אם יש בA איבר גדול ביותר, נקרא לו a, הוא חייב להיות בכל קבוצה שולטת. אז נגדיר $B = \{a\}$.

אחרת,

נגדיר את B באינדוקציה.

נבחר $b_0 \in D_0$.

נניח שעד כה בחרנו $b_0, ..., b_n$ (לא בהכרח שונים) כך ש$b_i \in D_i$ ו הם יוצרים קבוצה סדורה קווית. (כל b_i, עבור $i \neq n$, קטן או שווה לb_{i+1})

כעת, D_{n+1} שולטת, לכן קיים בה איבר b_{n+1} שגדול מb_n או שווה. נקח אותו.

וככה יוצרים קבוצה כמבוקש.

משפט: כל קס"ח סדור קווי, בן מניה, צפוף, בלי איבר ראשון ואחרון, הוא איזומורפי סדר ל$\mathbb{Q}$ עם היחס קטן הרגיל.

הוכחה: תהי $\langle A, < \rangle$ קס"ח קווו צפוף בן מניה בלי איבר ראשון ואחרון. רוצים למצוא איזו' סדר מ$\mathbb{Q}$ לA. מכיוון ש$\mathbb{Q}$ סדורה קווית, מספיק למצוא פונקציה על ושומרת סדר.

תהי B הקבוצה של כל הפונקציות שהם איזו' סדר מתת קבוצה סופית של $\mathbb{Q}$ לתת קבוצה סופית של A.

$$B = \{g : C \to A'\}$$

B לא ריקה, כי אפשר למשל לקחת נקודון מ$\mathbb{Q}$ ונקודון מA ולהגדיר בינהם התאמה. זה איזו' סדר.

יש לנו את יחס ההכלה על B. ‏(B היא קבוצה של פונקציות, ולכן יש עליה את יחס ההכלה, שזה בעצם היחס של "פונקציה אחת היא צמצום של השניה").

נסמן $D_q = \{g \in B : q \in dom(g)\}, E_a = \{g \in B : a \in Im(g)\}$.

נוכיח שלכל $q \in \mathbb{Q}$, D_q שולט. ולכל $a \in A$, E_a שולט.

יהי $q \in \mathbb{Q}$. תהי $g \in B$. אם $q \in dom(g)$ אז $g \in D_q$.

אחרת, נרצה להגדיר g' כך ש$q \in dom(g')$, ו$dom(g) \subset dom(g')$, ו$g = g'|_{dom(g)}$, כך שg' שומרת סדר ועל.

נחלק ל3 מקרים:

1. אם q קטן מכל האיברים ב$dom(g)$, נבחר $a \in A$ שקטן מכל האיברים ב$Im(g)$.

למה זה אפשרי? ניזכר כי A היא קבוצה סדורה קווית בלי איבר ראשון.

התמונה של g היא תת קבוצה סופית של A. מכיוון שהיא תת קבוצה סופית של קבוצה סדורה קווית יש בה איבר ראשון. האיבר הזה הוא לא איבר ראשון בA, כי אין איבר ראשון בקבוצה A. ולכן יש a שקטן ממנו.

נגדיר את g' באופן הבא.

$$dom(g') = dom(g) \cup \{q\}$$

g' תהיה מוגדרת אותו דבר על g, ואת q תשלח לA.

2. אם q גדול מכל איברי $dom(g)$, אז זה דומה למקרה הראשון: אפשר לבחור איבר בA שגדול מכל איברי $Im(g)$, ולשלוח אליו את q.

3. נסמן

$$X_{q,g} = \{q' \in dom(g) : q' > q\} \neq \emptyset$$

$$Y_{q,g} = \{q' \in dom(g) : q' < q\} \neq \emptyset$$

שתיהן תת קבוצות סופיות של קבוצה סדורה קווית, אז יש בהן איבר ראשון ואחרון.

$$x = \min X_{q,g}$$

$$y = \max Y_{q,g}$$

$y < q < x$ לכן $y < x$

$g(y) < g(x)$ כי g שומרת סדר. אז נבחר $g(y) < a < g(x)$, אפשרי כי A צפופה.

נגדיר את g' באופן הבא.

$$dom(g') = dom(g) \cup \{q\}$$

g' תהיה מוגדרת אותו דבר על g, ואת q תשלח לA.

ניתן לראות ש g' אכן שומרת סדר.

כעת נעבור לקבוצות E_a.

נשים לב שB מוגדרת כאוסף האיזו סדר מתתי קבוצות סופיות של $\mathbb{Q}$ לתת קבוצות סופיות של A. לכל פונקציה יש את ההופכי שהוא גם איזו' סדר. אז ניתן לעשות את מה שעשינו עבר הקבוצות D_q רק עם הפונקציות ההופכיות.

(וכן נזכור ש$Im(g) = dom(g^{-1})$).

כעת נשתמש בלמה.

מכיוון ש$\mathbb{Q}$ בן מניה וA בן מניה, אז $\{D_q, E_a : q \in \mathbb{Q}, a \in A\}$ בת מניה.

לפי הלמה יש תת קבוצה סדורה קווית Z של B שנחתכת עם כל D_q וכל E_a.

נגדיר פונקציה

$$f : \mathbb{Q} \to A$$

באופן הבא: יהי $q \in \mathbb{Q}$. נגדיר $f(q) = a$ אם קיימת פונקציה $g \in Z$ כך ש$g(q) = a$.

למה f היא אכן פונקציה?

מוגדרות היטב: אם יש $g_1, g_2 \in Z$ כך ש$g_1(q) = a_1$ ו$g_2(q) = a_2$, אז מכיוון שZ סדורה קווית, אחת מהן היא הצמצום של השניה לתחום שלה. כלומר, בה"כ $g_1 < g_2$. אז $g_2|_{dom(g_1)} = g_1$. $q \in dom(g_1)$, לכן $g_1(q) = g_2(q)$.

שלם: יהי $q \in \mathbb{Q}$. מהגדרת Z, $Z \cap D_q \neq \emptyset$. כלומר, יש $g \in Z$ כך ש$g \in dom(q)$.

למה f על:

מהגדרת Z, לכל $a \in A$, $Z \cap E_a \neq \emptyset$. לכן יש $g \in Z$ כך ש$a \in Im(g)$. כלומר, יש $q \in dom(g)$ כך ש$g(q) = a$. אז מהגדרת f, $f(q) = a$.

שומרת סדר: יהיו $q_1 < q_2$. רוצים להוכיח ש$f(q_1) < f(q_2)$.

לפי הגדרת f קיימים g_1 וg_2 כך ש

$$f(q_1) = g_1(q_1)$$

$$f(q_2) = g_2(q_2)$$

Z סדורה קווית. אז אפשר להשוות בין g_1 לg_2.

אם $g_1 = g_2$, אז מהגדרת B, g_1 היא שומרת סדר, ולכן $g_1(q_1) < g_1(q_2)$, סיימנו.

אחרת, נניח בה"כ ש$g_2 < g_1$. זה אומר ש$dom(g_1) \subset dom(g_2)$. אז לפי הגדרת f, $f(q_1) = g_2(q_1)$.

וg_2 שומרת סדר.

כלומר, בנינו איזו' סדר

$$f : \mathbb{Q} \to A$$

הגדרה: תהי $\langle A, < \rangle$ קס"ח. נגיד שהיא סדורה היטב (הסדר נקרא- סדר טוב) אם לכל תת קבוצה $\emptyset \neq B \subseteq A$ קיים איבר ראשון.

לדוגמא:

1. $\mathbb{N}$
2. $\{1, 2, 3..n\}$ עם הסדר "קטן" הרגיל.
3. כל קבוצה סופית סדורה קווית.
4. $\mathbb{N} \cup \{-1\}$ עם יחס סדר שקובע ש-1 גדול מכל האיברים ב$\mathbb{N}$.

דוגמאות נגדיות:

1. $\mathbb{R}$
2. $\mathbb{Q}$
3. $\mathbb{Z}$
4. $[0,\infty)$- יש איבר ראשון, אבל יש תת קבוצות שאין להן איבר ראשון.

הערה: כל קס"ח שאינו סדור קווית הוא לא סדור היטב.

הוכחה: אם $\langle A,<\rangle$ אינה סדורה קווית, קיימים $a\neq b\in A$ שאין בינהם יחס. ואז $\{a,b\}$ מקיימת שאין בה איבר ראשון.

מסקנה: קבוצות סדורות היטב הן בפרט סדורות קוויות.

תרגיל: הוכיחו שתת קבוצה של קבוצה סדורה היטב (כמובן, עם היחס המושרה) היא סדורה היטב.

הוכחה: נניח ש$\langle A,<\rangle$ סדורה היטב. ו$B\subseteq A$. תהי $\emptyset\neq C\subseteq B$, בפרט, $\emptyset\neq C\subseteq A$, ולכן מכיוון ש$A$ סדורה היטב, יש בה איבר ראשון.