פתרון תרגיל בית 11 – טופולוגיה

שאלה 1

א. הראו שלכל טופולוגיה יש בסיס.

ב. הראו שאם B_1 הוא אוסף של קבוצות פתוחות במרחב (X,τ), המכיל בסיס B_2 ל-τ, אזי B_1 הוא בעצמו בסיס ל-τ.

ג. יהיו τ_1,τ_2 טופולוגיות על X. יהי B_1 בסיס ל-(X,τ_1). אזי: $\tau_1\subseteq\tau_2$ אם ורק אם $B_1\subseteq\tau_2$.

פתרון

א. בתור בסיס ניתן לקחת את הטופולוגיה עצמה (קל לראות שהתכונות הדרושות עבור בסיס מתקיימות באופן טריוויאלי).

ב. B_1 הוא אוסף של קבוצות פתוחות ולכן נותר לבדוק את התנאי השני. תהי $O\in\tau$ ותהי $x\in O$. נרצה למצוא $U\in B_1$ כך ש-$x\in U\subseteq O$. B_2 בסיס ולכן קיימת $U\in B_2$ המקיימת $x\in U\subseteq O$. מכיוון ש-$B_2\subseteq B_1$ נקבל ש-$U\in B_1$ וקיבלנו את הדרוש.

ג. אם $\tau_1\subseteq\tau_2$ אזי ברור ש-$B_1\subseteq\tau_2$ (כי $B_1\subseteq\tau_1$ כבסיס ל-(X,τ_1)). בכיוון השני: תהי $O\in\tau_1$. קיימת משפחה של אינדקסים I ומשפחה של קבוצות $\{U_i\}_{i\in I}$ כך שלכל $i\in I$ $U_i\in B_1$ ומתקיים $O=\bigcup_{i\in I}U_i$ (מהגדרת בסיס). נתון כי $B_1\subseteq\tau_2$ ולכן לכל $i\in I$ $U_i\in\tau_2$. אך τ_2 היא טופולוגיה ולכן $O=\bigcup_{i\in I}U_i\in\tau_2$.

מש"ל

<u>שאלה 2</u>

א. יהיו X,Y מ"ט. יהיו $F\subseteq X, G\subseteq Y$ סגורות. הוכיחו כי הקבוצה $F\times G$ סגורה ב- $X\times Y$.

ב. יהיו X,Y מ"ט, $A\subseteq X, B\subseteq Y$. הוכיחו כי $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$.

ג. יהי $\left(X,\tau_{cof}\right)$ מ"ט אינסופי עם הטופולוגיה הקוסופית. נסמן ב-τ את טופולוגיית המכפלה על $X\times X$. האם τ היא הטופולוגיה הקוסופית על $X\times X$? הוכיחו או הפריכו!

<u>פתרון</u>

א. נראה שהמשלים של $F\times G$ הינה קבוצה פתוחה.

$(F\times G)^C=\left((X\setminus F)\times Y\right)\cup\left(X\times(Y\setminus G)\right)$ והיא פתוחה כאיחוד פתוחות (בסיסיות).

ב. יהיו X,Y מ"ט, $A\subseteq X, B\subseteq Y$. הוכיחו כי $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$.

בכיוון הראשון $\supseteq$:

יהי $(a,b)\in\overline{A}\times\overline{B}$ ונראה ש- $(a,b)\in\overline{A\times B}$.

מהגדרת הבסיס לטופולגיית המכפלה מ"ל שלכל $U\subseteq A, V\subseteq B$ סביבות של a,b בהתאמה, מתקיים: $\varnothing\neq(U\times V)\bigcap(A\times B)$.

תהיינה $U\subseteq A, V\subseteq B$ סביבות של a,b בהתאמה. מכיון ש- $a\in\overline{A}\wedge b\in\overline{B}$ נקבל ש $(V\bigcap B)\neq\varnothing\ \wedge\ (U\bigcap A)\neq\varnothing$. מכאן רואים כי:

$\varnothing\neq(U\bigcap A)\times(V\bigcap B)=(U\times V)\bigcap(A\times B)$.

הערה: $U\times V$ היא סביבה בסיסית, וראינו בכיתה שבהגדרת סגוֹר מספיק לרוץ על הסביבות הבסיסיות.

בכיוון השני $\subseteq$:

על-פי סעיף א', $\overline{A}\times\overline{B}$ סגורה וכמו כן מתקיים $A\times B\subseteq\overline{A}\times\overline{B}$ ולכן $\overline{A\times B}\subseteq\overline{A}\times\overline{B}$.

ג. עבור $a\in X$ כלשהו נתבונן ב- $X\times\{a\}\subseteq X\times X$. אזי $X\times\{a\}$ סגורה בטופולוגיית המכפלה (לפי סעיף א' + הגדרת הטופולוגיה הקוסופית).

עם זאת, הקבוצה $X\times\{a\}$ אינה סגורה בטופולוגיה הקוסופית על $X\times X$ שכן היא לא כל המרחב ואינה סופית.

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

יהי X מ"ט. נגדיר את האלכסון של $X\times X$ להיות $\Delta=\{(x,x):x\in X\}$. הראו שאם Δ סגור ב-$X\times X$ אזי X הוא האוסדורף. [שימו לב שאת הכיוון השני של הטענה הזו הוכחנו בתרגול.]

<u>פתרון</u>

נניח שהאלכסון Δ סגור ב-$X\times X$ ונניח בשלילה ש-X אינו האוסדורף. אזי קיימות $a\neq b\in X$ כך **שלכל** U,V סביבות של a,b בהתאמה, $U\cap V\neq\varnothing$. אך אז נקבל שלכל סביבה בסיסית $U\times V$ של (a,b) (הכוונה לקבוצה בבסיס של טופולוגית המכפלה) מתקיים $(U\times V)\cap\Delta\neq\varnothing$ (מדוע?) וזה מראה כי $(a,b)\in cl(\Delta)$ (הראינו שבהגדרה של סגור מספיק לבדוק סביבות בסיסיות) למרות ש$(a,b)\notin\Delta$ וזו סתירה לכך שהאלכסון Δ סגור.

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

יהיו X_1,X_2 מרחבים טופולוגיים. הוכיחו ש-$X_1\times X_2\cong X_2\times X_1$.

<u>פתרון</u>

נגדיר פונקציה $f:X_1\times X_2\to X_2\times X_1$ על-ידי $f(a,b)=(b,a)$. נוכיח שהיא רציפה. זוהי פונקציה לתוך מרחב מכפלה ולכן מספיק לבדוק רציפות בכל רכיב. כלומר, רציפות של הפונקציות $p_1\circ f$, $p_2\circ f$ כאשר $p_1:X_2\times X_1\to X_2$; $p_2:X_2\times X_1\to X_1$. מתקיים:

$p_1 \circ f : X_1 \times X_2 \to X_2 \ , \ p_2 \circ f : X_1 \times X_2 \to X_1$ ואלה למעשה פונקציות ההטלה על הרכיבים המתאימים (וידוע שהן רציפות).

ההופכית של f היא: $g : X_2 \times X_1 \to X_1 \times X_2$ וניתן להראות שהיא רציפה (באופן דומה).

לכן f הומיאומורפיזם.

מש"ל

<u>שאלה 5</u>

תהי $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ קבוצה ונגדיר שני אוספים של תתי קבוצות של X:

$B_1 = \{\{1\},\{2\},\{3\},...\}$, $B_2 = \{Z \subseteq X : \ X \setminus Z = \{1,2,3,...,n\}$ עבור n כלשהו $\}$.

א. הוכיחו כי $B = B_1 \bigcup B_2$ הוא בסיס לטופולוגיה כלשהי τ על X.

ב. הוכיחו ש-(X,τ) הוא מרחב טופולוגי האוסדורף.

<u>פתרון</u>

א. יש לבדוק שני תנאים.

1. הקבוצה $X \setminus \{1\} \in B_2$ (בדקו) וכן $\{1\} \in B_1$. מתקיים $X = (X \setminus \{1\}) \bigcup \{1\}$.
2. יהיו $C, D \in B$.

אם $C, D \in B_1$ אזי חיתוכן ריק או נקודון. ובכל מקרה ניתן להציג את $C \bigcap D$ כאיחוד של קבוצות מ-B.

אם $C \in B_1, D \in B_2$ אזי חיתוכן ריק או נקודון (וחזרנו למקרה הקודם).

אם $C, D \in B_2$ אזי $C \bigcap D \in B_2$. אכן, קיימים $m, n \in \mathbb{N}$ כך ש-$X \setminus C = \{1,...,n\}, \ X \setminus D = \{1,...,m\}$. מתקיים

$X \setminus (C \bigcap D) = (X \setminus C) \bigcup (X \setminus D) = \{1,...,\max\{n,m\}\}$.

ב. יהיו $x \neq y \in X$. אם $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ אזי נפרידן עם סביבות זרות של x, y בהתאמה: $\{x\},\{y\} \in B_1$.

אחרת, בה"כ $x=0, y \neq 0$. הסביבות הדרושות הן $y \in \{y\} \in B_1$, $x \in X \setminus \{y\} \in B_2$. קל לראות שהסביבות זרות.

מש"ל

__שאלה 6__

תהי $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה והפיכה. הוכיחו ש- f הומיאומורפיזם.

__הדרכה מומלצת__: (אפשר גם אחרת ☺)

א. הראו שלכל $a<b$ קיימים $c<d$ כך ש-$f[a,b]=[c,d]$; בנוסף,

ב. ($f(a)=c$ וגם $f(b)=d$) או ($f(a)=d$ וגם $f(b)=c$)

[כלומר, f (במקרה הזה) מעבירה שפה לשפה.]

ג. הסיקו ש- f פתוחה ולכן גם הומיאומורפיזם.

__פתרון__

א. $[a,b]$ קומפקטי וקשיר ולכן $f([a,b])$ קומפקטי וקשיר (בגלל הרציפות). תתי מרחבים קשירים וקומפקטיים של $\mathbb{R}$ (פרט לנקודונים) הם מהצורה $[c,d]$ (ונשים לב ש-$f([a,b])$ אינו נקודון, שכן f חח"ע).

לכן ניתן להסיק שקיימים $c,d \in \mathbb{R}$ כך ש $f([a,b])=[c,d]$.

ב. נראה כעת שייתכן רק אחד משני המצבים הבאים:

1) $f(a)=c \wedge f(b)=d$, או

2) $f(a)=d \wedge f(b)=c$.

אמנם, אחרת קיים $x \in (c,d)$ כך ש- $f(a)=x$ או $f(b)=x$.

נניח ש- $f(a)=x$ (בשלילה) .

מתקיים $(a,b]$ ת"מ קשיר אבל $f\left((a,b]\right)=\left[c,x\right)\cup\left(x,d\right]$ אינו קשיר וזו סתירה שכן פונקציה רציפה שולחת מרחב קשיר למרחב קשיר ו- $\left[c,x\right)\cup\left(x,d\right]$ אינו קשיר. בצורה דומה ניתן להוכיח שלא יתכן ש- $f(b)=x$ כאשר $x\in(c,d)$.

לכן בהכרח מתקיים אחד מהמצבים 1) או 2).

ג. מכל אחד מהמקרים הללו ניתן להסיק ש- $f\left((a,b)\right)=(c,d)$.

כלומר, פתוחה בסיסית (כלומר קטע פתוח) עוברת לפתוחה. מכאן הפונקציה היא פתוחה ולכן היא הומיאומורפיזם.

מש"ל