פתרון תרגיל 6 – חשבון אינפיניטסימלי 2 למדעי המחשב

1. חשבו את האינטגרלים הבאים:

(א) **פתרון**: כיוון ששני הגבולות אינסופיים, יש לפצל לשני אינטגרלים, והאינטגרל מתכנס אם ורק אם שניהם מתכנסים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+5} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

נשים לב:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(\frac{x+1}{2})^2+1}$$

נציב $t = \frac{x+1}{2} \Leftarrow dt = \frac{1}{2}dx$:

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\arctan(t) + C = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

לכן

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]_a^0 =$$

$$\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{a+1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{4}$$

ובדומה

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]_0^b =$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{b+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

ובסה"כ האינטגרל המקורי מתכנס ומתקיים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

(ב) **פתרון:** נשים לב

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

ולכן

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_a^0 =$$

$$\lim_{a\to-\infty}\left[0-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{a}{2}\right)\right] = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

(ג) **פתרון:** נשים לב שבקטע $[1,\infty)$ מתקיים $\ln(1+x^2) \geq \ln 2$ ולכן $\frac{\ln(1+x^2)}{x} \geq \frac{\ln 2}{x}$. אלו שתי פונקציות חיוביות, והאינטגרל $\int_1^\infty \frac{\ln 2}{x}dx$ מתבדר (חישוב פשוט מראה שהגבול המתאים הוא ∞), לכן ממבחן ההשוואה הראשון גם האינטגרל המקורי $\int_1^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$ מתבדר (ל־∞).

(ד) **פתרון:** תחילה נחשב את האינטגרל הלא־מסוים $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ בעזרת הצבת אוילר לשורשים. כיוון שהמכנה מתאפס בנקודות $x=1$, $x=3$, בחישוב שלהלן נגביל את עצמנו למקרה שבו x שייך לקטע סגור כלשהו המוכל ב־$(1,3)$.

הפולינום שתחת השורש פריק: $4x-x^2-3=-(x-1)(x-3)$, לכן נציב $t(x-1)=\sqrt{4x-x^2-3}$ $\Leftarrow t^2(x-1)^2=-(x-1)(x-3) \Leftarrow t^2(x-1)=-(x-3) \Leftarrow x(t^2+1)=t^2+3$ ולכן $x=1+\frac{2}{t^2+1}$ וכן $dx=-\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt$ ומקבלים

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int -\frac{1}{t\cdot\frac{2}{t^2+1}}\cdot\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt = -2\cdot\int\frac{dt}{t^2+1} = -2\arctan(t)+C =$$

$$= -2\arctan\sqrt{-\frac{x-3}{x-1}} + C$$

(שימו לב שההגבלה שהנחנו על תחום האינטגרציה מבטיחה שהביטוי שתחת השורש אי־שלילי!).

כעת נעבור לאינטגרל המקורי: זהו אינטגרל לא אמיתי מסוג שני שכן הפונקציה לא חסומה בשני הקצוות. לכן יש לפצל לשני אינטגרלים ולבדוק את ההתכנסות של אחד מהם בנפרד:

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$$

עבור האינטגרל הראשון מתקיים:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[-2\arctan\sqrt{-\frac{x-3}{x-1}}\right]_{1+\varepsilon}^2 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(-2\arctan 1 + 2\arctan\underbrace{\sqrt{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}}_{\to\infty}\right) = -2\cdot\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

ובדומה עבור האינטגרל השני:

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_2^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[-2\arctan\sqrt{-\frac{x-3}{x-1}}\right]_2^{3-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(-2\arctan\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}}_{\to0}+2\arctan 1\right) = -2\cdot0+2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

לכן בסה"כ האינטגרל המקורי מתכנס ומתקיים:

$$\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{\pi}$$

(ה) **פתרון**: האינטגרל $\int_{-1}^1\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$ הוא אינטגרל לא אמיתי מסוג שני כי הפונקציה לא חסומה בסביבת $x=0$. לכן יש לפרק

$$\int_{-1}^1\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\int_{-1}^0\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}+\int_0^1\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$$

נשים לב שהאינטגרל הימני הוא למעשה $\int_0^1\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\int_0^1\frac{dx}{x^{4/3}}$, והוא מתבדר ל־$\infty$ (לפי חישוב ישיר של הפונקציה הקדומה והגבול המתקבל). בדומה גם האינטגרל השמאלי מתבדר ל־∞, ולכן ודאי האינטגרל המקורי **לא קיים (מתבדר ל־∞)**.

2. חקרו את התכנסות האינטגרלים הבאים:

(א) **פתרון**: נשים לב שבקטע $[1,\infty)$ מתקיים $\frac{1}{\sqrt{x}}\le\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ (ושתי הפונקציות חיוביות). האינטגרל $\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ מתבדר (ע"י חישוב ישיר, או על סמך העובדה הידועה שהאינטגרל $\int_1^\infty\frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנס אם ורק אם $\alpha>1$ ואילו כאן $\alpha=\frac{1}{2}$). לכן ממבחן ההשוואה הראשון נובע שהאינטגרל הנתון **מתבדר** אף הוא.

(ב) **פתרון**: נשים לב שבקטע $[1,\infty)$ מתקיים $\frac{1}{x+e^{2x}}\le\frac{1}{e^{2x}}$ (ושתי הפונקציות חיוביות). כמו כן מתקיים

$$\int_1^\infty\frac{dx}{e^{2x}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-2x}dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_1^b=\lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{2}e^{-2b}+\frac{1}{2}e^{-2})=\frac{1}{2e^2}<\infty$$

(אפשר להסתפק בהוכחת ההתכנסות הזאת ע"י מבחן השוואה, ללא החישוב המלא). לכן, ממבחן ההשוואה הראשון, גם האינטגרל $\int_1^\infty\frac{dx}{x+e^{2x}}$ **מתכנס**.

(יש דרכים נוספות לפתור את השאלה, למשל בעזרת מבחן ההשוואה הגבולי עם $\frac{1}{x^2}$).

(ג) **פתרון**: נשים לב שבתחום $[2,\infty)$ מתקיים $\frac{5}{\sqrt{x}}=\frac{5x}{\sqrt{x^3}}\le\frac{5x}{\sqrt{x^3-1}}$ (ושתי הפונקציות חיוביות). כיוון שהאינטגרל $\int_2^\infty\frac{5}{\sqrt{x}}dx$ מתבדר, ממבחן ההשוואה הראשון נובע שהאינטגרל $\int_2^\infty\frac{5x}{\sqrt{x^3-1}}dx$ **מתבדר** אף הוא.

(ד) **פתרון**: נשים לב שהפונקציה $\sin\frac{1}{x}$ חיובית בתחום $[1,\infty)$ (שכן אז $\frac{1}{x}\in(0,1)$), לכן אפשר להיעזר במבחן ההשוואה הגבולי עם הפונקציה $g(x)=\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\frac{1}{2+x\sqrt{x}}}{\frac{1}{x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x\sqrt{x}}{2+x\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{\to1}\cdot\frac{1}{\underbrace{\frac{2}{x\sqrt{x}}}_{\to0}+1}=1\cdot1=1$$

לכן מהתכנסות האינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{2.5}} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$ נובע שהאינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}dx$ **מתכנס**. (ניתן היה לפתור גם בעזרת מבחן ההשוואה הראשון).

(ה) **פתרון**: האינטגרל $\int_{-1}^1 \frac{2^{\arcsin x}}{1-x}dx$ הוא אינטגרל לא אמיתי מסוג שני שכן הפונקציה לא חסומה בסביבת הנקודה $x=1$. מכיוון שהפונקציה חיובית בתחום זה, ניתן להיעזר במבחן ההשוואה הגבולי עם הפונקציה $g(x) = \frac{1}{1-x}$ (החיובית אף היא בתחום זה):

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{2^{\arcsin x}}{1-x}}{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1^-} 2^{\arcsin x} = 2^{\arcsin 1} = 2^{\pi/2}$$

(שימו לב שיש לקחת את הגבול כאשר $x \to 1^-$, שהיא הנקודה הבעייתית). לכן האינטגרל הנתון מתכנס אם ורק אם האינטגרל $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-x}$ מתכנס. נבדוק זאת:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-x} = \begin{bmatrix} t = 1-x & x: -1 \to 1 \\ dt = -dx & t:\ 2 \to 0 \end{bmatrix} = \int_0^2 \frac{dt}{t}$$

ומכאן שהאינטגרל מתבדר (שוב לפי העובדה הידועה שהאינטגרל $\int_0^2 \frac{dt}{t^\alpha}$ מתכנס אם ורק אם $\alpha < 1$). לפיכך גם האינטגרל הנתון **מתבדר**.

3. **פתרון**: נבדוק לאילו ערכי $p \in \mathbb{R}$ האינטגרל $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln^p x}$ מתכנס:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln^p x} = \begin{bmatrix} t = \ln x & x: 1 \to 2 \\ dt = \frac{1}{x}dx & t: 0 \to \ln 2 \end{bmatrix} = \int_0^{\ln 2} \frac{dt}{t^p}$$

לפי העובדה הידועה אינטגרל זה מתכנס אם ורק אם $p < 1$. לנוחיותכם אנו מביאים גם את הוכחת עובדה זו. לשם כך נפריד למקרים:

א. $p > 1$:

$$\int_0^{\ln 2} \frac{dt}{t^p} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{\ln 2} \frac{dt}{t^p} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{t^{-p+1}}{-p+1}\right]_\varepsilon^{\ln 2} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{(\ln 2)^{-p+1}}{-p+1} - \frac{\varepsilon^{-p+1}}{-p+1}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p} + \frac{\varepsilon^{1-p}}{p-1}\right] = \infty$$

(זאת משום שהחזקה של ε שלילית!), כלומר במקרה זה האינטגרל מתבדר.

ב. $p = 1$:

$$\int_0^{\ln 2} \frac{dt}{t} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{\ln 2} \frac{dt}{t} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [\ln t]_\varepsilon^{\ln 2} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln(\ln 2) - \underbrace{\ln\varepsilon}_{\to -\infty} = \infty$$

וגם במקרה זה האינטגרל מתבדר.

ג. $p < 1$: אם $p \le 0$ אז האינטגרל ודאי מתכנס כי זה אינטגרל אמיתי. אם $0 < p < 1$ הוא גם מתכנס, כי

$$\int_0^{\ln 2} \frac{dt}{t^p} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{\ln 2} \frac{dt}{t^p} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{t^{-p+1}}{-p+1}\right]_\varepsilon^{\ln 2} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p}-\frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p}\right]=\frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p}$$

(הפעם החזקה של ε חיובית ולכן הביטוי עם ε שואף לאפס!). כלומר במקרה $p<1$ האינטגרל מתכנס.

לסיכום, האינטגרל הנתון מתכנס אם ורק אם $\boldsymbol{p<1}$.