פתרונות תרגיל 1

שאלה 1

בדקו האם קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ מהווה חבורה למחצה לגבי הפעולות הבינאריות הבאות:

א) $a*b=a^2+ab$

לא – אין אסוציאטיביות.

ב) $a*b=\sqrt{a+b}$

לא- אין אסוציאטיביות

ג) $a*b=(a^2+b^2)/2$

לא- אין אסוציאטיביות

שאלה 2

בדקו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות עם הפעולות הנתונות האם היא: חבורה למחצה/ מונואיד/ חבורה. כמו כן, בדקו האם הפעולה היא קומוטטיבית.

א. $(\mathbb{Z},\bullet)$ כאשר $a\bullet b=a+b+2$

זאת חבורה. איבר היחידה הוא $e=-2$, וההופכי של b הוא $-4-b$. הפעולה היא קומוטטיבית.

ב. $(\mathbb{Z}_4,\cdot)$

כן מונואיד, לא חבורה (מכיוון שאפס לא הפיך). הפעולה היא קומוטטיבית.

ג. $(\mathbb{Z},-)$

הפעולה אינה אסוציאטיבית ולכן זאת לא חבורה למחצה. הפעולה אינה קומוטטיבית.

ד. $(P(X),\Delta)$, באשר X קבוצה כלשהי ו-Δ ההפרש הסימטרי המוגדר ע"י $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ לכל $A,B\in P(X)$.

זאת חבורה. אסוציאטיביות ידועה מבדידה. האיבר הנייטרלי הוא הקבוצה הריקה.וקל לבדוק שכל איבר הוא ההופכי של עצמו. הפעולה היא קומוטטיבית.

שאלה 3

א. תהיינה $(H,*),(G,\bullet)$ חבורות. נגדיר פעולה $\cdot$ על המכפלה הקרטזית $G\times H$ כדלהלן:

$$\left(g_1,h_1\right)\cdot\left(g_2,h_2\right)=\left(g_1\bullet g_2,h_1*h_2\right).$$

הוכיחו כי $G\times H$ היא חבורה תחת פעולה זו.

פתרון:

סגירות - $g_1 \bullet g_2 \in G, h_1 * h_2 \in H \Leftrightarrow (g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2) = (g_1 \bullet g_2, h_1 * h_2)$

וכמובן ש $g_1 \bullet g_2 \in G, h_1 * h_2 \in H$ שהרי G,H חבורות ולכן סגורות.

אסוציאטיביות -

$$\left((g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2)\right)\cdot(g_3,h_3) = (g_1 \bullet g_2, h_1 * h_2)\cdot(g_3,h_3) = \left((g_1 \bullet g_2)\bullet g_3, (h_1 * h_2) * h_3\right)$$
$$= \left(g_1 \bullet (g_2 \bullet g_3), h_1 * (h_2 * h_3)\right) = \cdot(g_1,h_1)(g_2 \bullet g_3, h_2 * h_3)$$

הופכי - $(g,h)\left(g^{-1},h^{-1}\right) = \left(g \bullet g^{-1}, h * h^{-1}\right) = (e_G, e_H) \quad \forall g \in G, h \in H$

ב. הוכיחו שהחבורה $\Omega_2 \times \Omega_2$ היא לא ציקלית.

פתרון :

מספיק לשים לב כי לא ניתן לקבל את כל החבורה מהעלאה בחזקה של איבר אחד.

$\Omega_2 \times \Omega_2$	$(e^{i\pi},1)$	$(1,e^{i\pi})$	$(1,1)$	$(e^{i\pi},e^{i\pi})$
$(e^{i\pi},1)$	$(1,1)$	$(e^{i\pi},e^{i\pi})$	$(e^{i\pi},1)$	$(1,e^{i\pi})$
$(1,e^{i\pi})$	$(e^{i\pi},e^{i\pi})$	$(1,1)$	$(1,e^{i\pi})$	$(e^{i\pi},1)$
$(1,1)$	$(e^{i\pi},1)$	$(1,e^{i\pi})$	$(1,1)$	$(e^{i\pi},e^{i\pi})$
$(e^{i\pi},e^{i\pi})$	$(1,e^{i\pi})$	$(e^{i\pi},1)$	$(e^{i\pi},e^{i\pi})$	$(1,1)$

<u>שאלה 4</u>

א. האם $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in R, a^2+b^2>0\right\}$ היא חבורה למחצה, מונואיד או חבורה (ביחס לפעולת

כפל מטריצות)?

<u>פתרון:</u> ניתן לבדוק על פי בדיקה ישירה שזו חבורה.

ב. תהי $G=\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix} \mid A,B,C\in\mathbb{R}\right\}$. הוכיחו ש- G היא חבורה ביחס לכפל מטריצות (חבורה זו נקראת **Heisenberg group**). האם היא אבלית?

פתרון:

סגירות : $\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&d&e\\0&1&f\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&d+a&e+af+b\\0&1&f+c\\0&0&1\end{pmatrix}\in G$

אסוציאטיביות : נובעת מהאסוציאטיביות של כפל מטריצות.

הופכי : אפשר למצוא בקלות כי ההופכי הינו

$$\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-a&ac-b\\0&1&-c\\0&0&1\end{pmatrix}\in G$$

שאלה 5

א. הראו שכל אגודה S אפשר להרחיב למונואיד $S'=S\cup\{e\}$, אם נגדיר את e להיות איבר היחידה במבנה החדש.

פתרון:

ברור מה הפעולה. נראה אסוציאטיביות.

ב. תארו את המונואיד המתקבל לאחר חזרה n פעמים על הבניה של הסעיף הקודם, כאשר מתחילים עם מונואיד האפס $M=\{0\}$.

פתרון:

נסמן ב- e_0 את $0\in M$. נסמן ב- e_i את האיבר שנוסף למבנה בשלב ה- i. מכיוון ש- e_n נוסף בשלב האחרון, הוא יהיה איבר היחידה במונואיד. נבחן את פעולת הכפל במונואיד. בשלב ה- i מתקיים: $e_je_i=e_ie_j=e_j$ עבור $j\le i$. לכן, בשלב האחרון מתקיים: $e_je_i=e_ie_j=e_k$ כאשר $k=\min\{i,j\}$.

<u>שאלה 6</u>

תהי G חבורה ונניח שמתקיים $(ab)^2=a^2b^2$ לכל $a,b\in G$. הוכיחו ש- G אבלית.

פתרון :

$$abab=a^2b^2\Rightarrow a^{-1}\left(abab\right)b^{-1}=a^{-1}\left(aabb\right)b^{-1}$$
$$\Rightarrow ba=ab$$

מש"ל.

<u>שאלה 7</u>

הוכיחו ש:

א) b מחלק את a אמ"מ $a\mathbb{Z}$ היא ת"ח של $b\mathbb{Z}$.

ב) $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=\left(a,b\right)\mathbb{Z}$

ג) $a\mathbb{Z}\cap b\mathbb{Z}=[a,b]\mathbb{Z}$.

<u>פתרון:</u>

א) $a\mathbb{Z}\le b\mathbb{Z}$ ולכן קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $a=bn$ כלומר $b\,|\,a$. מצד שני, אם $b\,|\,a$ אז קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $a=bn$. אם $x\in a\mathbb{Z}$ אז $x=am\rightarrow x=bnm\rightarrow x\in b\mathbb{Z}$.

ב) נוכיח בהכלה דו כיוונית.

$\subseteq$: ידוע כי ניתן להציג את $\gcd(a,b)$ כצ"ל של a,b, כלומר $\gcd(a,b)=au+bv,\quad u,v\in\mathbb{Z}$. יהי $x\in a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ אזי קיימים $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ כך ש- $x=an_1+bn_2$. אנחנו צריכים למצוא $m\in\mathbb{Z}$ כך ש- $(a,b)m=an_1+bn_2$. נקח $m=\frac{a}{(a,b)}\cdot n_1+\frac{b}{(a,b)}\cdot n_2$ וסיימנו.

$\supseteq$: נכון כי ה- gcd(a,b) הוא צירוף לינארי של a,b.

ג) $x\in a\mathbb{Z}\cap b\mathbb{Z}\Leftrightarrow a\,|\,x\wedge b\,|\,x\Leftrightarrow[a,b]\,|\,x\Leftrightarrow\exists m\in\mathbb{Z}:x=[a,b]m\Leftrightarrow x\in[a,b]\mathbb{Z}$.

<u>שאלה 8</u>

מצאו (באמצעות אלגוריתם אוקלידס) את המחלק המשותף המקסימלי: $\left(5614,1260\right)$.

פתרון:

$$\left(5614,1260\right)=\left(1260,574\right)=\left(574,112\right)=\left(14,112\right)=14$$

א. מצאו $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ כך ש- $1525\alpha+927\beta=1$.

פתרון:

$a=1525, b=927$

$a-b=598 \Rightarrow a-b=598$

$b-(a-b)=2b-a=329$

$a-b-(2b-a)=2a-3b=269$

$2b-a-(2a-3b)=5b-3a=60$

$2a-3b-4(5b-3a)=14a-23b=29$

$5b-3a-2(14-23)=51b-31a=2$

$14a-23b-(51b-31a)=448a-737b=1$

$\Rightarrow \alpha=448, \beta=-737$