מבוא לטופולוגיה
תוכן תרגיל כיתה 2

מרחבים מטריים

תזכורת

<u>הגדרה</u>. מרחב מטרי מגדרים כזוג (M,d) כאשר M קבוצה

ו- d פונקציה $d: M^2 \to [0,\infty)$ כך שלכל $x,y,z \in M$:

1) $d(x,y)=0$ אם"ם $x=y$
2) $d(x,y)=d(y,x)$
3) $d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z)$

דוגמאות (מהארצאה) :

(M,d_{0-1}) , מרחב אוקלידי $\mathbb{R}^n$ ובפרט: $\mathbb{R}$ עם מטריקה $d(x,y)=|x-y|$

==

אם $M' \subseteq M$ אז (M',d) גם מרחב מטרי ומטריקה d עליו נקראת מושרה.

==

<u>תרגיל 1</u> . תהי $M=\{a,b,c\}$ כך שפונקציה $d: M^2 \to \mathbb{R}$ ניתנה בטבלאות 1 - 6 למטה: בכל טבלה מספר שנמצא בחיתוך של עמודה x ושורה y מסמן מרחק $d(x,y)$ בין הטיברים x,y.

אילו מהטבלאות מגדירות מטריקה?

טבלה 1	c	b	a	$\boldsymbol{d}$:
	5	3	0	a
	4	0	3	b
	0	4	5	c

<u>פתרון (טבלה 1)</u>. זאת מטריקה : כל האקביומות מתקימות.

טבלה 2	c	b	a	$\boldsymbol{d}$:
	5	3	0	a
	0	0	3	b
	0	0	5	c

<u>פתרון (טבלה 2)</u>. זאת לא מטריקה: $d(b.c)=d(c,b)=0$, למרות ש-$b \ne c$

d:	a	b	c	טבלה 3
a	0	3	2	
b	3	0	2	
c	2	2	0	

פתרון (טבלה 3). זאת מטריקה : כל האקסיומות מתקימות.

d:	a	b	c	טבלה 4
a	0	3	1	
b	3	0	1	
c	1	1	0	

פתרון (טבלה 4). זאת לא מטריקה : האקסיומה 3 לא מתקיימת:

$$d(a,b) = 3 > 1 + 1 = d(a,c) + d(c,b)$$

d:	a	b	c	טבלה 5
a	0	3	5	
b	3	1	4	
c	5	4	1	

פתרון (טבלה 5). זאת לא מטריקה : האקסיומה 1 לא מתקיימת:

$$d(b,b) = d(c,c) = 1 > 0$$

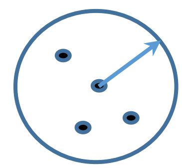
d:	a	b	c	טבלה 6
a	0	-3	5	
b	-3	0	4	
c	5	4	0	

פתרון (טבלה 6). זאת לא מטריקה : $d(a,b) = -3 < 0$

הגדרה. (תזכורת)

יהי (M,d) מרחב מטרי, $x \in M$, ו- $r \in \mathbb{R}, r > 0$.

תת קבוצה $B(x,r) = \{y \in M \mid d(y,x) < r\}$ נקראת *כדור פתוח* *עם מרכז* x *ורדיוס* r.



סדרות , התכנסות. (תזכורת)

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in M$$

$$x_1, x_2, x_3 \dots$$

הגדרה. יהי M מרחב מטרי . סדרה x_n היא פונקציה $s: \mathbb{N} \to M$.

סימון: $s(n) = x_n \in M$.

לפעמים כדח להגדיר סדרה רושמים כמה איבריה בצורה גלויה:

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

לפעמים קיימת נוסחה לאיבר x_n אז רושמים סדרה על עדי הנוסחה,

למשל: $\frac{1}{2^n}$ מסמנת סדרה $\dots \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$.

הערה חשובה

סדרה x_n ו- קבוצת אבריה $\{x_n\}$ זה לא אותו דבר!

באופן מדוייק : $\boldsymbol{\{x_n\} = s(\mathbb{N})}$.

התכנסות. (תזכורת)

הגדרה. יהי (M,d) מרחב מטרי . סדרה $x_n \in M$ מתכנסת לנקודה $a \in M$ אם:

1) לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ מתקיים $d(x_n, a) < \varepsilon$.

$$\Updownarrow$$

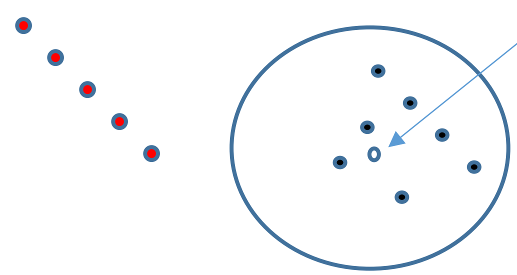
2) לכל $\varepsilon > 0$ האי שוויון $d(x_n, a) < \varepsilon$ מתקיים לכל איברי הסדרה חוץ ממספר סופי של האיברים. (יותר מדויק - חוץ מקבוצה סופית של האינדכסים!).

$$\Updownarrow$$

3) לכל $\varepsilon > 0$ רק מספר סופי של איברי הסדרה נמצא מחוץ לכדור $B(a,\varepsilon)$.
(יותר מדויק – רק איברים עם קבוצה סופית של האינדכסים יכולים להימצא מחוץ לכדור).

$$\Updownarrow$$

4) לכל $\varepsilon > 0$ כל איברי הסדרה החל ממקום (אינדקס) מסוים נמצאים בתוך הכדור $B(a,\varepsilon)$.



הערה. הבדל בין נוסח "3" לבין נוסח "4" - רק הבדל מלולי.

תרגיל.
יהיו d ו- δ שתי מטריקות על הקבוצה M כך ש-$\boldsymbol{\delta(x,y) \le d(x,y)}$ לכל $x,y \in M$. הוכיחו ש- $x_n \xrightarrow{d} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{\delta} x$.
(הסימון $x_n \xrightarrow{\rho} x$ משמעותו: x_n מתכונסת ל x בחחס למטריקה ρ.)

הוכחה : נסמן כדור פתוח ביחס למטריקה ρ ב- $B_\rho(x,r)$.
נעיר שמתנאי התרגיל נובע: $B_d(x,r) \subseteq B_\delta(x,r)$. **(*)**
$(\boldsymbol{y \in B_d(x,r) \Rightarrow d(y,x) < r \Rightarrow \delta(y,x) \le d(y,x) < r \Rightarrow y \in B_\delta(x,r)})$
עכשיו, תהי x_n סדרה כך ש- $x_n \xrightarrow{d} x$ וניקח $\varepsilon > 0$.
אזי רק מספר סופי של נקודות x_n נמצאות מחוץ ל -$B_d(x,\varepsilon)$ ולכן בוודאי לא יותר נקודות נמצאות מחוץ ל -$B_\delta(\varepsilon,r)$ - בגלל (*).
לכן, לפי הגדרות בדף הקודם, $x_n \xrightarrow{\delta} x$. מש"ל.

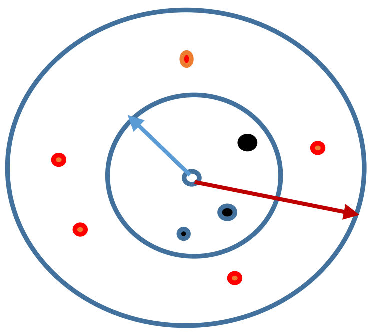
הגדרה. (חדשה)
תת קבוצה M' במ"מ (M,d) נקראת *חסומה* אם קיים כדור פתוח $B(x_0,r_0) \subseteq M$ כך ש-$M' \subseteq B(x_0,r_0)$.
או במלים אחרות קיים כדור פתוח שמכל את תת הקבוצה כולה.

הגדרה (תזכורת).
סדרה x_n במרחב מטרי נקראת *סדרת קושי* אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m,n \ge n_0$ מתקיים: $d(x_m,x_n) < \varepsilon$.

הגדרה. (חדשה) הסדרה x_n נקראת *חסומה* אם קבוצת איבריה $\{x_n\}$ חסומה.

<u>תרגיל .</u>
<u>הוכיחו</u> שכל סדרת קושי במ"מ היא סדרה חסומה.

<u>הוכחה.</u> נניח x_n היא סדרת קושי . אזי (אם נקח $\varepsilon = 1$)
קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m, n \geq n_0$ מתקיים: $d(x_m, x_n) < 1$ אז בפרט:
לכל $n \geq n_0$ מתקיים: $d(x_n, x_{n_0}) < 1$.
ניקח: $r = \max\{d(x_1, n_0), d(x_2, n_0), \ldots, d\left(x_{n_0-1}, x_{n_0}\right), 1\} + \frac{1}{2}$.
אז כל האיברים x_n נמצאים בתוך $B(n_0, r)$ (תבדקו!), מש"ל.



<u>מסכנה.</u> כל סדרה מתכנסת חסומה.
<u>הוכחה:</u> כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי (ההרצאה). לכן היא חסומה.

<u>הגדרה (לא פורמלית)</u>

תהי x_n סדרה במרחב מטרי M . אם אנחמו "נזרוק" חלק מאיברי הסדרה ואת האיברים שנשארו נמספר מחדש בלי שינוי סדר,
אז נקבל סדרה חדשה שנקראת <u>*תת סדרה של סדרה x_n .*</u>

נניח ש-

לאיבר הראשון של הסדרה החדשה היה בסדרה המקורית מספר n_1 ,

לאיבר השני של הסדרה החדשה היה בסדרה המקורית מספר n_2 ,

לאיבר השלישי של הסדרה החדשה היה בסדרה המקורית מספר n_3 ,

.....

לאיבר מספר i של הסדרה החדשה היה בסדרה המקורית מספר n_i

....

כאן: $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_i < \cdots$

תת סדרה מסמנים כ-x_{n_i}.

אפשר להציג תת סדרה בטבלה:

...	i	...	4	3	2	1
...	$\downarrow$	...	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
...	n_i	...	n_4	n_3	n_2	n_1
	$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
	x_{n_i}		x_{n_4}	x_{n_3}	x_{n_2}	x_{n_1}

הטבלה מובילה להגדרה פורמלית של תת סדרה:

<u>הגדרה (פורמלית)</u>

תהי סדרה x_n מוגדרת כפונקציה $s: \mathbb{N} \to M$ כך ש-$s(n) = x_n \in M$.

תהי פונקציה $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ עולה ממש. אזי ההרכבה $s \circ \sigma$ נקראת <u>*תת סדרה של x_n .*</u>

.

תרגיל

הוכיחו: כל תת סדרה של סדרה מתכנסת גם מתכנסת ולאותו גבול.

הוכחה: יהיו $x_n \to a$ ו- $\varepsilon > 0$.

אזי רק מספר סופי של איברי x_n נמצאים ב-$B^c(a, \varepsilon)$. אז על אחת כמה וכמה, מספר רק מספר סופי של איברי תת סדרה x_{n_i} נמצאים ב- $B^c(a, \varepsilon)$ כי סדרת האינדקסים n_i עלה ממש. לכן $x_{n_i} \to a$, מש"ל.

הערה. $B^c(a, \varepsilon)$ מסמן משלים לכדור $B(a, \varepsilon)$.

תזכורת

משפט. פונקציה $f: M \to N$ רציפה ב-a אם"ם

$$x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$$