אנליזה מודרנית
פתרון תרגיל 10

תרגיל 1 יהי $(X,\mathcal{S},\mu)$ ממ"ח, ויהיו $1 \le r < p < \infty$. הוכיחו כי לא בהכרח מתקיים $L^p(X,\mathcal{S},\mu) \subseteq L^r(X,\mathcal{S},\mu)$ וגם כי ההכלה ההפוכה, $L^r(X,\mathcal{S},\mu) \subseteq L^p(X,\mathcal{S},\mu)$ אינה בהכרח נכונה.

הוכחה. נגדיר $X = \mathbb{R}$ עם אלגברת לבג $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ ומידת לבג m, ונבחר $r = 1, p = 2$. נביט בפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} I_{[1,\infty)}(x)$. מתקיים כי

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} \cdot I_{[1,\infty]} dm(x) = \infty$$

מדוע? נגדיר סדרת פונקציות $f_n = \frac{1}{x} I_{[1,n]}$. ברור כי זו סדרה עולה, ומתקיים ש־$\frac{1}{x} I_{[1,n]} \to \frac{1}{x} I_{[1,\infty)}$. ולכן, לפי התכנסות מונוטונית,

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} I_{[1,n]} dm(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} I_{[1,n]} dm(x) = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x} dm(x) = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \int_1^\infty \frac{1}{x} = \infty$$

כאשר השתמשנו בעובדה שעל קטע סופי בו הפונקציה חסומה ואינטגרבילית רימן, אינטגרל לבג שווה לאינטגרל רימן. מכאן, בגלל ש־f חיובית, בהכרח $f \notin L^1$. אבל $f^2(x) = \frac{1}{x^2} I_{[1,\infty)}$ כן מקיימת

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2} I_{[1,\infty)} dm(x) = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx < \infty$$

כאשר כאן השתמשנו בטענה מן התרגול לפיה אינטגרל רימן על הקרן האינסופית שווה ללבג כאשר ההתכנסות היא בהחלט, וכידוע $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ מתכנס בהחלט. מכאן, $f^2 \in L^2$, ולכן בהכרח $L^2 \not\subseteq L^1$.

כעת, נוכיח כי $L^2 \not\subseteq L^1$. נגדיר $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} I_{(0,1)}(x)$, והיא חיובית ולכן הערך המוחלט מיותר. בדיוק באותו האופן לעיל[1], ניתן להוכיח כי $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{x}} I_{(0,1)}(x) dm(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \infty$. כמו כן, $g^2(x) = \frac{1}{x} I_{(0,1)}(x)$, וגם עם התכנסות מונוטונית באותו האופן לעיל מוכיח כי אינטגרל כי:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} I_{(0,1)}(x) dm(x) = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty$$

ולכן מתקיים כי $g \in L^1$, אבל $g \notin L^2$, ולכן $L^1 \not\subseteq L^2$, ולכן הוכחנו את הדרוש. ■

[1] התכנסות מונוטונית ושקילות אינטגרל לבג ורימן על קטע סופי בו הפונקציה חסומה.

תרגיל 2 נניח כי $\mu(X)=1$, ויהיו $f,g:X\to[0,\infty]$ פונקציות מדידות ואי־שליליות המקיימות $fg\geq 1$ כב"מ ($d\mu$). הוכיחו כי

$$\left(\int_X fd\mu\right)\left(\int_X gd\mu\right)\geq 1$$

הוכחה. $\sqrt{f},\sqrt{g}$ מדידות כהרכבה של פונקציה מדידה ופונקציה רציפה, וזה חוקי כי f,g אי־שליליות. כעת, $fg\geq 1$ כב"מ ולכן $\sqrt{fg}\geq 1$ כב"מ, ולכן:

$$\int_X \sqrt{fg}d\mu \geq \int_X 1d\mu = \mu(X) = 1$$

מכאן, בעזרת אי־שיוויון הולדר עבור $p=q=2$:

$$1\leq \int_X \sqrt{fg}d\mu \leq \left(\int_X |\sqrt{f}|^2 d\mu\right)^{1/2}\left(\int_X |\sqrt{g}|^2 d\mu\right)^{1/2} = \left(\int_X fd\mu\right)^{1/2}\left(\int_X gd\mu\right)^{1/2}$$

נעלה בריבוע ונקבל:

$$1\leq \left(\int_X fd\mu\right)\left(\int_X gd\mu\right)$$

כדרוש. ∎

תרגיל 3 כזכור, ℓ^∞ הוא מרחב כל הסדרות $\mathbf{x}=\{x_n\}_{n=1}^\infty$ המקיימות $\|\mathbf{x}\|_\infty := \sup_n |x_n| < \infty$. נגדיר תת־מרחב $X\subseteq \ell^\infty$ להיות מרחב כל הסדרות שמתאפסות פרט למספר סופי של אינדקסים. הוכיחו כי X אינו בנך.

הוכחה. נוכיח זאת ע"י כך שנמצא סדרת קושי ב־X שאינה מתכנסת לאיבר ב־X. נגדיר את הסדרה $\mathbf{x}_n$ ע"י:

$$(\mathbf{x}_n)_i = \begin{cases} \frac{1}{i} & i\leq n \\ 0 & i>n \end{cases}$$

כלומר,

$$\begin{gathered} \mathbf{x}_1 = (1,0,0,0,\dots) \\ \mathbf{x}_2 = (1,1/2,0,0,\dots) \\ \mathbf{x}_3 = (1,1/2,1/3,0,\dots) \end{gathered}$$

וכך הלאה. נוכיח כי הסדרה הנ"ל מתכנסת ל־$\mathbf{x} = (1,1/2,1/3,1/4,\dots)$. מתקיים:

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| = \|(0,0,\dots,0,1/n+1,1/n+2,\dots)\| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ולכן אכן $\mathbf{x}_n\to\mathbf{x}$. מכאן, הרי ש־$\mathbf{x}_n$ סדרת קושי. נשים כמו כן לב כי לכל $n\in\mathbb{N}$: $\mathbf{x}_n\in X$, ולכן $\mathbf{x}_n$ סדרת קושי ב־X. אבל $\mathbf{x}\notin X$ ולכן $\mathbf{x}_n$ אינה מתכנסת ב־X עצמו. מכאן ש־X אינו שלם, ולכן אינו בנך, כנדרש. ∎