תרגול 3

הצבות טריגונומטריות $x=a\sin t, x=a\cos t$

כאשר נתון אינטגרל מהצורה $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$ ניתן להשתמש בהצבה $x=a\sin t$ או $x=a\cos t$.

תרגיל

הראה ש $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+c$.

פתרון

נציב $x=a\sin t$ ואז $dx=a\cos tdt$ ו $\sin t=\frac{x}{a}\Leftarrow t=\arcsin\frac{x}{a}$.

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}dt=\int\frac{a\cos t}{a\sqrt{1-\sin^2 t}}dt=\int\frac{a\cos t}{a\cos t}dt=\int 1dt=t=\arcsin\frac{x}{a}$$

תרגיל

חשב את האינטגרל $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$.

פתרון

נציב $x=2\sin t$ ואז $dx=2\cos tdt$ ו $\sin t=\frac{x}{2}\Leftarrow t=\arcsin\frac{x}{2}$.

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int\frac{4\sin^2 t\cdot 2\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}dt=4\int\sin^2 tdt.$$

נשתמש בזהות $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ ונקבל $4\int\sin^2 tdt=2\int(1-\cos 2t)dt=2t-\sin 2t$.

נשים לב ש $\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}$.

נקבל ש $2t-\sin 2t=2\arcsin\frac{x}{2}-x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$.

אינטגרלים מהצורה $\sin ax\cos bx, \sin ax\sin bx, \cos ax\cos bx$.

נשתמש בזהויות:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

דוגמא

$$\int\sin 3x\cos 7xdx=\frac{1}{2}\int(\sin 10x-\sin 4x)dx=-\frac{1}{20}\cos 10x+\frac{1}{8}\cos 4x+C$$

אינטגרלים מהצורה $\sin^n x\cos^m x$

נראה שיטה לחשב אינטגרלים מהצורה $\sin^n x\cos^m x$ כאשר m,n שלמים ולפחות אחד מהם אי זוגי.

אם m אי זוגי נציב $t=\sin x$ ואז $dt=\cos xdx$.

$$\int\sin^n x\cos^m xdx=\int\sin^n x\cos^{m-1}x\cos xdx=\int\sin^n x\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{m-1}{2}}\cos xdx=\int t^n(1-t)^{\frac{m-1}{2}}dt$$

כל שנותר לחשב אינטגרל של פולינום.

אם n אי זוגי נציב $t=\cos x$ ואז $dt=-\sin xdx$

$$\int \sin^n x \cos^m x dx = -\int -\sin^{n-1} x \cos^m x \sin x dx = -\int -\left(1-\cos^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} \cos^m x \sin x dx = -\int \left(1-t\right)^{\frac{n-1}{2}} t^m dt$$

כל שנותר לחשב אינטגרל של פולינום.

<u>תרגיל</u>

חשב את $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$.

<u>פתרון</u>

נציב $t=\sin x$ ואז $dt = \cos x dx$

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx =$$

$$= \int t^4\left(1-t^2\right)dt = \int \left(t^4 - t^6\right)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + c = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c$$

אם m,n מספרים אי שליליים זוגיים נשתמש בזהויות

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

כדי להוריד את גודל החזקה.

<u>תרגיל</u>

חשב את $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$.

<u>פתרון</u>

$$\int \cos^4 x \sin^2 x dx = \int \cos^2 x \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8}\left[\int \sin^2 2x + \sin^2 2x \cos 2x dx\right]$$

נחשב את האינטגרל עבור המחובר הראשון

$$\int \sin^2 2x dx = \int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8}$$

נחשב את האינטגרל עבור המחובר השני

$\int \sin^2 2x \cos 2x dx$ נציב $t = \sin 2x$ ונקבל $dt = 2\cos 2x dx$

$$\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int 2\sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int t^2 dt = \frac{t^3}{6} = \frac{\sin^3 2x}{6}.$$

נציב חזרה את התוצאות האחרונות ונקבל את האינטגרל

$$\int \cos^4 x \sin^2 x dx = \frac{1}{8}\left[\int \sin^2 2x + \sin^2 2x \cos 2x dx\right] = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + c.$$

<u>הצב טריגונומטרית אוניברסאלית $t = \tan\frac{x}{2}$.</u>

נציב $t = \tan\frac{x}{2}$.

נרשום את $\sin x$ באמצעות t.

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1/\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)/\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}$$

נרשום את $\cos x$ באמצעות t

$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 2\cdot\frac{1}{\tan^2\frac{x}{2}+1} - 1 = \frac{2}{t^2+1} - 1 = \frac{1-t^2}{t^2+1}$.

נרשום את $\tan x$ באמצעות t

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{t^2+1}{1-t^2} = \frac{2t}{1-t^2}$.

נשים לב ש $t = \tan\frac{x}{2} \Leftarrow \frac{x}{2} = \arctan t \Leftarrow x = 2\arctan t \Leftarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

<u>תרגיל</u>

חשב $\int\frac{dx}{\cos x + \sin x + 1}$.

<u>פתרון</u>

נשתמש בהצבה $t = \tan\frac{x}{2}$ ואז $\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$, $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

נציב את הערכים הנ"ל ונקבל

$$\int\frac{dx}{\cos x + \sin x + 1} = \int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1+t^2}{1+t^2}\right)} = \int\frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| = \ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right| .$$

<u>תרגיל</u>

חשב בעזרת הצבה טריגונומטרית אוניברסאלית $\int\frac{dx}{\sin x}$.

<u>פתרון</u>

נשתמש בהצבה $t = \tan\frac{x}{2}$ ואז $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

נציב את הערכים הנ"ל ונקבל

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\cdot\frac{2t}{1+t^2}} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| .$$

<u>פתרון אינטגרלים באמצעות נוסחת נסיגה</u>

נרצה לחשב את סדרת האינטגרלים $I_n = \int f_n(x)dx$.

שיטת האינטגרציה לפי חלקים מאפשרת למצוא אינטגרל באמצעות נוסחת נסיגה.

נחשב את I_1 ולאחר מכן נחשב את I_{n+1} באמצעות I_n .

נרשום את הפתרון $\begin{cases} I_1 = \int f_1(x)dx \\ I_{n+1} = \phi(I_n) \end{cases}$

<u>תרגיל</u>

חשב את האינטגרל $I_n = \int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}$.

<u>פתרון</u>

עבור $n=1$ נקבל $I_1 = \int\frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$.

עבור $n>1$ נשתמש בנוסחה $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$.

נסמן $u = \frac{1}{(x^2+1)^n}$ ואז $u' = \frac{-2nx}{(x^2+1)^{n+1}}$

$v' = 1$ $\quad v = x$

נקבל

$$(1) I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx$$

נשאר לחשב את האינטגרל $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx$.

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx = \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}dx - \int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx - \int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx = I_n - I_{n+1}$$

נציב ב (1) ונקבל $I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n(I_n - I_{n+1}) \Leftarrow I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n$.