תירגול לינארית למורים בש תשפב סמסטר ב

13 באפריל 2022

חדוא

חשבו את הקדומות הבאות

1. $\int \frac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}\mathrm{dx}$

פתרון: דבר ראשון דרגת המונה קטנה ממש מדרגת המכנה ולכן אין צורך בחילוק פולינומים כשלב מקדמים.
כעת, נרצה להציג את המכנה כמפלה של גורמים אי פריקים:

$$x^3+x^2=x^2\left(x+1\right)$$

כאשר $x,x+1$ גורמים אי פריקים ולכן קיימים A,B,C קבועים כך ש

$$\frac{2x^2+2x+1}{x^2\left(x+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$$

שימו לב שהגורם x הוא גורם אי פריק לינארי ממעלה 2 ולכן יש מעליו קבוע בלבד. לעומת זאת, בגורם אי פריק ריבועי (פרבולה מרחפת) ממעלה 1 יהיה $Ax+B$.
הערה: יכלנו במקום ההצגה של $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$ יכלנו גם $\frac{Ax+B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$ אבל האלגורתים לא עובד כך (סתם קטנוני) וגם אנחנו יודעים בקלות לחשב אינטגלים מהצורה $\frac{A}{x},\frac{B}{x^2}$ לעומת $\frac{Ax+B}{x^2}$.
חזרה לתרגיל, נמצא את הקבועים ע"י שנכפיל את השיוויון לעיל ב $x^2\left(x+1\right)$ ונקבל

$$2x^2+2x+1=Ax\left(x+1\right)+B\left(x+1\right)+Cx^2$$

ונציב $x=0$ ונקבל $B=1$. ונציב $x=-1$ ונקבל $C=1$. נציב עוד ערך שרירותי $x=1$ לקבל

$$5=2A+2B+C$$

ולכן

$$A=\frac{5-2B-C}{2}=\frac{5-2-1}{2}=1$$

ולכן בסה"כ

$$\int\frac{2x^2+2x+1}{x^2\left(x+1\right)}\mathrm{dx}=\int\frac{1}{x}\mathrm{dx}+\int\frac{1}{x^2}\mathrm{dx}+\int\frac{1}{x+1}\mathrm{dx}=$$

$$=\ln\left|x\right|-\frac{1}{x}+\ln\left|x+1\right|+C$$

2. $\int \frac{1}{x^6-1}\mathrm{dx}$.

פתרון: האתגר פה (הראשון לפחות) הוא להציג את המכנה x^6-1 כמפלה של גורמים אי-פריקים.
דבר ראשון

$$x^6-1=\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)$$

איזה שורש ברור שיש לה x^3-1? 1 ולכן $x^3-1=(x-1)\,p(x)$. נבצע חילוק פולינומים ונקבל

$$\begin{array}{c|c} x^2+x+1 & \\ \hline x^3-1 & x-1 \\ x^3-x^2 & \\ ---- & \\ x^2-1 & \\ x^2-x & \\ ---- & \\ x-1 & \\ x-1 & \end{array}$$

לכן

$$x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$$

ומכיוון ש $1^2-4\cdot1\cdot1<0$ נקבל ש x^2+x+1 אי פריק. נמשיך עם הפירוק של x^3+1. גם פה רואים ש -1 שורש של הפולינום ולכן

$$x^3+1=(x-(-1))\,q(x)=(x+1)\,q(x)$$

ונבצע חילוק פולינומים לקבל

$$\begin{array}{c|c} x^2-x+1 & \\ \hline x^3+1 & x+1 \\ x^3+x^2 & \\ ---- & \\ -x^2+1 & \\ -x^2-x & \\ ---- & \\ x+1 & \\ x+1 & \end{array}$$

ולכן

$$x^3+1=(x+1)\left(x^2-x+1\right)$$

וקל לדווא ש x^2-x+1 אי פריק גם כן. לכן סה"כ

$$x^6-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)(x+1)\left(x^2-x+1\right)$$

לכן: קיימים קבועים A_1,A_2,B_1,C_1,B_2,C_2 כך ש

$$\frac{1}{x^6-1}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+x+1}+\frac{B_2x+C_2}{x^2-x+1}$$

ונמצא את הקבועים. נכפיל ב x^6-1 לקבל

$$\begin{aligned} 1=&A_1(x+1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\\ &+A_2(x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\\ &+(B_1x+C_1)(x-1)(x+1)\left(x^2-x+1\right)\\ &+(B_2x+C_2)(x-1)(x+1)\left(x^2+x+1\right)\end{aligned}$$

נציב $x=1$ לקבל $1=A_1\cdot 2\cdot 3$ ולכן $A_1=\frac{1}{6}$.
נציב $x=-1$ לקבל $1=A_2\cdot(-2)\cdot 3$ ולכן $A_2=-\frac{1}{6}$. נציב עוד ערכים:
נציב $x=0$ לקבל

$$1=A_1-A_2-C_1-C_2=\frac{1}{3}-C_1-C_2$$

לכן $C_1+C_2=-\frac{2}{3}$.
נציב $x=2$ לקבל

$$\begin{aligned}1&=A_1\cdot 3\cdot 7\cdot 3+A_2\cdot 7\cdot 3+(2B_1+C_1)(3\cdot 3)+(2B_2+C_2)(3\cdot 7)\\&=\frac{21}{2}-\frac{7}{2}+18B_1+9C_1+42B_2+21C_2\\&=7+18B_1+9C_1+42B_2+21C_2\end{aligned}$$

נציב $x=-2$ לקבל

$$\begin{aligned}1&=-3\cdot 7A_1-3\cdot 3\cdot 7A_2+(-2B_1+C_1)(3\cdot 7)+(-2B_2+C_2)(3\cdot 3)\\&=\frac{-7}{2}+\frac{21}{2}+-42B_1+21C_1+-18B_2+9C_2\\&=7-42B_1+21C_1+-18B_2+9C_2\end{aligned}$$

ומשוואה נוספת נקבל מהשוואת המקדם של x^5,

$$\begin{aligned}1&=A_1(x+1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\\&+A_2(x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\\&+(B_1x+C_1)(x-1)(x+1)\left(x^2-x+1\right)\\&+(B_2x+C_2)(x-1)(x+1)\left(x^2+x+1\right)\end{aligned}$$

ונקבל

$$0=A_1+A_2+B_1+B_2=B_1+B_2$$

סה"כ קיבלנו את המשוואות

$$\begin{cases}B_1+B_2&=0\\C_1+C_2&=-\frac{2}{3}\\-42B_1+21C_1-18B_2+9C_2&=-6\\18B_1+9C_1+42B_2+21C_2&=-6\end{cases}$$

נפתור עם אלגברה לינארית (מטריצה). יש לנו 4 משוואות עם 4 נעלמים שנסדר אותם B_1,B_2,C_1,C_2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&0\\0&0&1&1&-\frac{2}{3}\\-42&-18&21&9&-6\\18&42&9&21&-6\end{array}\right)\xrightarrow[\frac{1}{3}R_4]{\frac{1}{3}R_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&0\\0&0&1&1&-\frac{2}{3}\\-14&-6&7&3&-2\\6&14&3&7&-2\end{array}\right)\xrightarrow{R_3+14R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&0\\0&0&1&1&-\frac{2}{3}\\0&8&7&3&-2\\6&14&3&7&-2\end{array}\right)\xrightarrow{R_4-6R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&0\\0&0&1&1&-\frac{2}{3}\\0&8&7&3&-2\\0&8&3&7&-2\end{array}\right)\xrightarrow{R_4-R_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&0\\0&0&1&1&-\frac{2}{3}\\0&8&7&3&-2\\0&0&-4&4&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&0\\0&8&7&3&-2\\0&0&1&1&-\frac{2}{3}\\0&0&-4&4&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_4+4R_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&0\\0&8&7&3&-2\\0&0&1&1&-\frac{2}{3}\\0&0&0&8&-\frac{8}{3}\end{array}\right)$$

הגענו לצורה מדורגת אבל נמשיך לצורה מדורגת קנונית

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -\frac{8}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{8}R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-3R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-7R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{8}R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

הגענו לכך ש

$$B_1 = -\frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{6}, C_1 = -\frac{1}{3}, C_2 = -\frac{1}{3}$$

וביחד עם $A_1 = \frac{1}{6}, A_2 = -\frac{1}{6}$ נקבל ש

$$\frac{1}{x^6-1} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}}{x^2+x+1} + \frac{\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}}{x^2-x+1}$$

נמשיך לאינטגרלים (אני משמיט את $+C$ בכל מקום):

$$\int \frac{1}{x-1}\mathrm{dx} = \ln|x-1|, \int \frac{1}{x+1}\mathrm{dx} = \ln|x+1|$$

נמשיך עם האינטגרלים המסובכים יותר:

$$\int \frac{-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}}{x^2+x+1}\mathrm{dx} = -\frac{1}{6}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\mathrm{dx} = -\frac{1}{12}\int\frac{2x+4}{x^2+x+1}\mathrm{dx} =$$

$$-\frac{1}{12}\int\frac{2x+1+3}{x^2+x+1}\mathrm{dx} = -\frac{1}{12}\left[\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{dx} + 3\int\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{dx}\right] =$$

$$-\frac{1}{12}\left[\ln\left(x^2+x+1\right) + 3\int\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{dx}\right]$$

ונמשיך עם $\int\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{dx}$: נשתמש בהשלמה לריבוע

$$\int\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{dx} = \int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{4}\right)}\mathrm{dx} = \int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+0.75}\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{1}{0.75}\int\frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{0.75}}\right)^2+1}\mathrm{dx} = \left[\begin{array}{c} t = \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{0.75}} \\ \mathrm{dt} = \frac{1}{\sqrt{0.75}}\mathrm{dx} \Rightarrow \sqrt{0.75}\mathrm{dt} = \mathrm{dx} \end{array}\right] = \frac{\sqrt{0.75}}{0.75}\int\frac{1}{t^2+1}\mathrm{dt} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0.75}}\arctan t = \frac{1}{\sqrt{0.75}}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{0.75}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

סדר: התחלנו עם הפירוק הזה

$$\frac{1}{x^6-1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}}{x^2+x+1}+\frac{\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}}{x^2-x+1}$$

וחישבנו את האינטגרלים של שלושת המחוברים הראשונים. נמשיך עם הרביעי

$$\int\frac{\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}}{x^2-x+1}\mathrm{dx}=\frac{1}{12}\int\frac{2x-4}{x^2-x+1}\mathrm{dx}=\frac{1}{12}\left[\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{dx}-3\int\frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{dx}\right]=$$

$$=\frac{1}{12}\left[\ln\left(x^2-x+1\right)-3\int\frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{dx}\right]$$

ונחשב לסיום:

$$\int\frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{dx}=\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4}}\mathrm{dx}=\frac{1}{\sqrt{0.75}}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{0.75}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

ולכן התשובה הסופית היא :

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^6-1}\mathrm{dx}=&\frac{1}{6}\cdot\ln|x-1|-\frac{1}{6}\cdot\ln|x+1|\\&-\frac{1}{12}\left[\ln\left(x^2+x+1\right)+3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right]\\&+\frac{1}{12}\left[\ln\left(x^2-x+1\right)-3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right]\\&+C\end{aligned}$$

לינארית

1. דרגו את המטריצה הבאה לצורה מדורגת קנונית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: נתחיל עם איפוס כל האיברים שמתחת ל 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ \mathbf{1} & -1 & 5 & 6 \\ \mathbf{2} & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ונמשיך עם החלק הירוק

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

והגענו לצורה מדורגת. מי האיברים הפותחים בכל שורה? האיברים הכחולים הבאים

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

כי הם הראשונים בכל שורה ששונים מאפס.
שאלה המשך: במידה והמטריצה שהתחלנו איתה מייצגת מערכת משוואות

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

כאשר העמודה האחרונה היא עמודת תוצאה. מי המשתנים החופשיים? ומי המשתנים התלויים? תשובה: אין חופשיים, כולם תלויים. וכמה פתרונות יש? אחד ויחיד! כי אין שורת סתירה ואין משתנים חופשיים.
במידה והמטריצה שהתחלנו איתה מייצגת מערכת משוואות הומוגנית, כלומר

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

מי המשתנים החופשיים/תלויים? יש אחד חופשי - המשתנה האחרון, כל שלוש המשתנים הראשוניים - תלויים. וכמה פתרונות יש? יש אינוסף. למה? כי יש משתנה חופשי ואין שורת סתירה. בואו נפתרו את שתי מערכות המשוואות האלה, ונעשה זאת ע"י המשך דירוג המטריצה לצורה קנונית: נהפוך את כל האיברים הפותחים ל 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{6}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

כעת נמשיך ע"י איפוס כל האיברים שמעל האיברים הפותחים, מימין לשמאל

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

נעבור לאיבר הפותח הבא:

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2\frac{1}{2} \\ 0 & {\color{red}1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & {\color{red}1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ועכשיו נחזור למערכות המשוואות שלנו. אם זה המערכת הראשונה (לא הומגנית) נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & {\color{red}1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

והפתרון שלנו הוא $\begin{pmatrix} 2.5 \\ -2 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. אם זה המערכת ההמוגנית

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & {\color{red}1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

ואז w הוא משתנה חופשי שיכול לקבל על ערך, נסמן $w = t$ ואז: המשוואה הראשונה היא $x + \frac{3}{2}w = 0$ ולכן

$$x = -\frac{3}{2}t$$

והמשוואה השניה היא $y - 2w = 0$ ולכן

$$y = 2t$$

והמשוואה השלישית היא $z + \frac{1}{2}w = 0$ ולכן

$$z = -\frac{1}{2}t$$

ולכן הפתרון הכללי

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t \\ 2t \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. במערכת הומגנית עם 3 משוואות ו 4 נעלמים - כמה משתנים חופשיים יכולים להיות ואיך נראה הפתרון הכללי בכל אחת מהמקרים?
פתרון:

- יכול להיות משתנה חופשי אחד, כמו שראינו

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

והפתרון הכללי שלו הוא

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t \\ 2t \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- יכול להיות שתי משתנים חופשיים, למשל

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש לנו 2 משתנים חופשיים $y = t, w = s$ ואז מהמשוואה הראשונה

$$x = -\frac{3}{2}s$$

והמשוואה השניה

$$z = 2s$$

והפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}s \\ t \\ 2s \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- יכול להיות 3 משתנים חופשיים, למשל

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ואז y, z, w משתנים חופשיים, נסמן $y = t_1, z = t_2, w = t_3$ ואז מהמשוואה הראשונה $x = 0$ והפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} 0 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- יכול להיות 4 משתנים חופשיים, למשל (וזה הדוגמה היחידה)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ואז נסמן $x = t_1, y = t_2, z = t_3, w = t_4$ והפתרון הכללי

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הערה: במערכת

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש 3 משתנים חופשיים y, z, w ומשתנה תלוי בודד שהוא x. וכמו קודם, נסמן $y = t_1, z = t_2, w = t_3$ ואז מהמשוואה הראשונה

$$x = -t_1 - t_2 - t_3$$

והפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} -t_1 - t_2 - t_3 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- האם יכול להיות שלא יהיה משתנה חופשי? לא יכול להיות במקרה שלנו. למה? כי יש 3 שורות ולכן לכל היותר 3 איברים פותחים. כיוון שיש 4 נעלמים, אחד מהם בודאות יהיה חופשי.

3. נתון שהמטריצה הבאה בצורה **קנונית**. כמה מתוך ? אפשר לדעת בודאות את הערך שלהם

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ? & ? & 0 \\ 0 & 1 & 3 & ? & 2 \\ 0 & ? & ? & ? & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? \end{pmatrix}$$

פתרון: בשביל שמטריצה תהיה בצורה קנונית צריך שהיא תהיה מדורגת ובנוסף, כל האיברים הפותחים 1 וכל האיברים שמעל ומתחת לאיברים פותחים - אפסים. אצלנו, האדומים

$$\begin{pmatrix} {\color{red}1} & 0 & ? & ? & 0 \\ 0 & {\color{red}1} & 3 & ? & 2 \\ 0 & ? & ? & ? & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? \end{pmatrix}$$

בודאות איברים פותחים ולכן נוכל להשלים

$$\begin{pmatrix} {\color{red}1} & 0 & ? & ? & 0 \\ 0 & {\color{red}1} & 3 & ? & 2 \\ 0 & {\color{green}0} & ? & ? & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? \end{pmatrix}$$

בנוסף, בשורה השלישית יש איבר פותח כי השורה לא כולה אפסים (יש לפחות איבר אחד שונה מאפס.) האחד שמופיע בסוף השורה השלישית לא יכול להיות איבר פותח כי מעליו יש 2 וצריך להיות רק אפסים. באותו נימוק גם האיבר השלישי בשורה (הסימן שאלה שמתחת ל 3) לא יכול להיות איבר פותח ולכן חייב להיות

$$\begin{pmatrix} {\color{red}1} & 0 & ? & ? & 0 \\ 0 & {\color{red}1} & 3 & ? & 2 \\ 0 & {\color{green}0} & {\color{green}0} & {\color{green}1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? \end{pmatrix}$$

ומכיוון שמעל ומתחת לאיבר פותח יש אפסים נוכל לדעת גם

$$\begin{pmatrix} {\color{red}1} & 0 & ? & {\color{green}0} & 0 \\ 0 & {\color{red}1} & 3 & {\color{green}0} & 2 \\ 0 & {\color{green}0} & {\color{green}0} & {\color{green}1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & {\color{green}0} & ? \end{pmatrix}$$

השורה האחרונה חייבת להיות שורת אפסים כי אם בפינה הימנית למטה היה איבר פותח הוא היה צריך להיות אחד וכל מי שמעליו אפס. אבל מעליו יש 1 וגם 2.. ולכן

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & 0 & ? & \color{green}{0} & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 3 & \color{green}{0} & 2 \\ 0 & \color{green}{0} & \color{green}{0} & \color{green}{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \color{green}{0} & \color{green}{0} \end{pmatrix}$$

וסימן השאלה הנוסף - יכול להיות כל ערך ועדיין נקבל צורה קנונית.