שאלה 1

א. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$

ב. $2\left(x^2+2x+\frac{5}{2}\right)=2\left((x+1)^2+\frac{3}{2}\right)$

ג. $7\left(x^2+\frac{1}{7}x+\frac{100}{7}\right)=7\left(x^2+\frac{1}{14}x+\frac{100}{7}-\frac{1}{196}\right)$

שאלה 2:

בצע חלוקה של הפולינומים הבאים:

1) $b(x)=x+5\ ,\ a(x)=x^3+9x^2+19x-5$

פתרון:

$$x^3+9x^2+19x-5=(x^2+4x+14)(x+5)-75$$

2) $b(x)=x+5\ ,\ a(x)=3x^3$

פתרון:

$$3x^2=(3x-15)(x+5)+75$$

3) $b(x)=x^3-x\ ,a(x)=(x-1)^3$

פתרון:

קודם כל נשים לב ש־$(x-1)$ מחלק את שני הפולינומים ולכן ניתן לצמצם אותו בחלוקה.
מה שנשאר לעשות זה לחלק x^2-2x+1 ב־x^2+x
לאחר חלוקה נקבל שהשארית היא $-3x+1$ ולכן

$$\frac{(x-1)^3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)}=\frac{x^2+x-3x+1}{x^2+x}=1-\frac{3x+1}{x^2+x}$$

הערה: לא חובה לשים לב לזה, אפשר גם לעשות את החילוק ישירות.

שאלה 3

(1 $\frac{x^2-2x}{x^2-4x+3}$

פתרון:

$$x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$$
$$\frac{x^2-2x}{x^2-4x+3}=\frac{x^2-2x}{(x-3)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}$$
$$x^2-2x=A(x-1)+B(x-3)$$

נציב $x=1$

$-1=-2b$ ולכן $B=\frac{1}{2}$

נציב $x=3$: $3=2A$ ולכן $A=\frac{3}{2}$

ולכן הפירוק הוא $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}$

(2 $\frac{x^3}{x^2+6x+10}$

פתרון:

נשים לב שהמעלה של המונה היא קטנה יותר מהמכנה לכן נחלק את המונה במכנה ונקבל

$$\frac{(x^2+6x+10)(x-6)+20x+60}{x^2+6x+10}=x-6+\frac{20x+60}{x^2+6x+10}$$

בנוסף נשים לב שהמכנה אי פריק ולכן זה הפירוק

(3 $\frac{x^2+1}{x^2+6x+9}$

פתרון:

כמו בדוגמה הקודמת נשים לב שמעלת המונה שווה למעלת המכנה ולכן לאחר חילוק פולינומים נקבל:

$$\frac{x^2+6x+9-6x-8}{x^2+6x+9}=1-\frac{6x+8}{(x+3)^2}$$

נזכר של עבור כל חזקה של $(x+3)$ יש שבר חלקי כלומר:

$$\frac{6x+8}{(x+3)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}$$
$$6x+8=A(x+3)+B$$

לאחר פתרון נקבל: $A=6$, $B=-10$

ולכן הפירוק הוא $1-\frac{6}{x+3}+\frac{10}{(x+3)^2}$

(4 $\frac{x}{x^2-5x+6}$

פתרון:

$$x^2-5x+6=(x-6)(x+1)$$
$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-6}+\frac{B}{x+1}$$
$$x=A(x+1)+B(x-6)$$
$$A=\frac{6}{7},\ B=\frac{1}{4}$$

ולכן הפירוק הוא $\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{x-6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}$

$\frac{11x+17}{2x^2+7x-4}$ (5

פתרון:

$$2x^2+7x-4=(x-\tfrac{1}{2})(x+4)$$

$$\frac{11x+17}{(x-\frac{1}{2})(x+4)}=\frac{2(11x+17)}{(2x-1)(x+4)}=2\cdot\left(\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+4}\right)$$

$$11x+17=2A(x+4)+2B(2x-1)$$

$$A=\frac{5}{2},B=\frac{3}{2}$$

ולכן $\frac{5}{2x-1}+\frac{3}{x+4}$

<u>שאלה 4</u>

1. אחרי חילוק פולינומים נשארים עם:

$$\int dx-\int\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}dx$$

הראשון כמובן x, לחישוב השני נפרק את המכנה לגורמים אי-פריקים (לפי משוואה דו-ריבועית) ונבצע פירוק לשברים חלקיים:

$$\int\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}dx=\int\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=\frac{16}{3}\int\frac{1}{x^2+4}dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

סה"כ מקבלים

$$x-\frac{8}{3}arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{3}arctan(x)+C$$

2. פירוק המכנה לגורמים $(x^2+1)(x^2+4)$ (לפי משוואה דו-ריבועית)
אחרי פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{3}\int\frac{5x+3}{x^2+1}dx-\frac{5}{3}\int\frac{x}{x^2+4}dx$$

סה"כ מקבלים:

$$\frac{5}{6}\left(ln(x^2+1)-ln(x^2+4)\right)+arctan(x)+C$$

3. פירוק המכנה לגורמים אי-פריקים: $\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

אחרי פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

סה"כ האינטגרל:

$$\frac{1}{4}ln|x-1|-\frac{1}{4}ln|x+1|-\frac{1}{2}arctan(x)+C$$

4. אחרי חילוק פולינומים: $2+\frac{3x^2-x+2}{x^3-8}$

נטפל באינטגרל של השבר: פירוק שלו לגורמים (לפי הנוסחא של a^3-b^3):

$$(x-2)(x^2+2x+4)$$

אחרי פירוק לשברים חלקיים

$$\frac{2x+1}{x^2+2x+4}+\frac{1}{x-2}$$

סה"כ האינטגרל:

$$2x+ln|x^2+2x+4|-\frac{1}{\sqrt{3}}arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+ln|x-2|+C$$

5. פירוק המכנה לגורמים אי-פריקים (לפי ההדרכה שפורסמה):

$$\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$$

לאחר פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{\sqrt{8}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx-\frac{1}{\sqrt{8}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

סה"כ מקבלים:

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}ln\left|x^2+\sqrt{2}x+1\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)-\frac{1}{4\sqrt{2}}ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right)$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)$$

6.
7. $3ln|x-3|-2ln|x-2|+C$
8. $3ln|x+4|+\frac{5}{2}ln|2x-1|+C$
9. $ln|x|+2ln|x+3|-ln|x-3|+C$
10. אחרי חילוק פולינומים:

$$3+\frac{12x-22}{x^2-4x+4}$$

נטפל בשבר: המכנה מתפרק ל-$(x-2)^2$. פירוק לשברים חלקיים

$$\frac{12}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}$$

סה"כ מקבלים

$$3x + 12ln|x - 2| - \frac{2}{x - 2} + C$$

11. אחרי חילוק פולינומים $x + 3 + \frac{7x-6}{x^2-3x+2}$

נטפל בשבר הימני. פירוק המכנה $(x - 2)(x - 1)$. אחרי שברים חלקיים

$$\frac{8}{x - 2} - \frac{1}{x - 1}$$

סה"כ מקבלים

$$\frac{x^2}{2} + 3x + 8ln|x - 2| - ln|x - 1| + C$$

12. תשובה סופית $\frac{x^3}{3} + x - ln|x| + ln|x + 1| + 2ln|x - 1| + C$

13. אחרי חילוק פולינומים

$$2 + \frac{2x + 3}{x(x - 1)}$$

תשובה סופית

$$2x - 3ln|x| + 5ln|x - 1| + C$$

14. המכנה כבר מפורק. אחרי פירוק לשברים חלקיים:

$$-\int \frac{1}{x + 1} dx + 2\int \frac{1}{x - 3} dx - \int \frac{1}{(x - 3)^2} dx$$

סה"כ

$$-ln|x + 1| + 2ln|x - 3| + \frac{1}{x - 3} + C$$

15. המכנה כבר מפורק, אחרי פירוק לשברים חלקיים:

$$-\frac{14}{17}\int \frac{1}{4x - 1} dx + \frac{3}{17}\int \frac{4x + 1}{x^2 + 1} dx$$

סה"כ

$$-\frac{7}{34} ln|4x - 1| + \frac{6}{17} ln|x^2 + 1| + \frac{3}{17} arctan(x) + C$$

16. נבצע חילוק פולינומים. המכנה כבר אי-פריק. סה"כ מקבלים

$$\frac{x^2}{2} - 3x + ln|x^2 + 1| + C$$

<u>שאלה 5 (תרגיל רשות – לא להגשה)</u>

ראינו שכל אינטגרל של פונקציה רציונלית ניתן ע"י חילוק פולינומים ופירוק לשברים חלקיים להביא לאחד מ-4 סוגי אינטגרלים (n מספר טבעי):

$$\int \frac{A}{ax+b}, \int \frac{A}{(ax+b)^n}, \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}, \int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$$

ראינו איך מטפלים ב-3 הראשונים. מטרת שאלה זו להדריך אתכם להגיע לנוסחה לפתרון האינטגרל הרביעי.

א. הראו כי עבור *a>0*, מתקיים $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctan\frac{x}{a} + C$

ב. כעת חשבו את האינטגרל מסעיף א' בדרך נוספת, ע"י אינטגרציה בחלקים, כאשר $u = \frac{1}{x^2+a^2}$ ו-$v' = 1$.

ג. בסעיף ב' לאחר אינטגרציה בחלקים מקבלים בצד ימין את האינטגרל $\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$. ע"י הוספת והחסרת a^2 מהמכנה, הציגו אותו ע"י אינטגרל ידוע + $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}$ (כפול קבוע).

ד. כמסקנה מסעיפים א'-ג' מקבלים כי כעת יש לנו נוסחא לחישוב $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}$.

ה. הכלילו את התהליך לעיל: כדי למצוא איך לחשב את $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$ מתחילים עם $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}dx$ ועושים עליו אינטגרציה בחלקים עם $v' = 1$. כך מקבלים ביטוי עבור $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$ באמצעות $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}dx$. כלומר אם אנחנו יודעים לפתור את האינטגרל הזה עבור n מסוים אנחנו יודעים לפתור אותו גם עבור $n+1$, וכיוון שאנחנו יודעים לפתור את הראשון (סעיף א'), אנחנו יודעים כעת לפתור כל אינטגרל מהצורה $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$.

ו. כעת נעבור לפתרון $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$. *ראשית ניתן להניח כי $a = 1$ (אחרת הוציאו אותו גורם משותף ואז מחוץ לאינטגרל).*

ז. כעת בצעו השלמה לריבוע במכנה ואחריה הציבו $t = x + \frac{b}{2}$.

ח. את האינטגרל שהתקבל ניתן להפריד לשני אינטגרלים, אחד מהם נפתר ע"י הצבה והשני הוא האינטגרל שפתרנו בסעיפים א'-ה'.