

# תרגול 1

1. נתון מרחב מטרי  $(X, d)$ . הוכיחו שלכל  $x, y \in X$  ו-  $A \subseteq X$  מתקיים

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$$

הוכחה: נכתוב את הטענה בפירוט:

$$\inf_{a \in A} d(x, a) \leq d(x, y) + \inf_{b \in A} d(y, b)$$

כדי להוכיח ש- $\inf$  גדול או שווה ממשו, צריך להראות את זה לכל איבר עליו הוא רץ. לכן, יהי  $b \in A$ . נראה ש:

$$\inf_{a \in A} d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, b)$$

כדי להוכיח ש- $\inf$  קטן או שווה ממשו, מספיק למצוא דוגמה. נבחר  $a:=b$ . לפי אי שיוויון המשולש באמת מתקיים:

$$d(x, b) \leq d(x, y) + d(y, b)$$

2. הוכיחו שאיחוד של כמות סופית של קבוצות חסומות הוא חסום.  
הוכחה: לפי אינדוקציה, מספיק להראות שהטענה מתקיימת עבור מקרה של שתי קבוצות, כלומר שאם  $A, B \subseteq X$  חסומות, אז גם  $A \cup B$  חסומה.  
אכן, נבחר  $a \in A, b \in B$  ונגדיר

$$M := \text{diam } A + d(a, b) + \text{diam } B < \infty.$$

שימו לב שאם אחת הקבוצות ריקה אז הטענה טריוויאלית ולכן אפשר להניח שבחירה כזו היא אפשרית.  
כעת נרצה להוכיח ש

$$\text{diam}(A \cup B) := \sup_{x, y \in A \cup B} d(x, y) \leq M.$$

כדי להוכיח ש- $\sup$  קטן או שווה למשו, צריך להראות את זה לכל בחירה של איברים מתאימים.  
לכן יהיו  $x, y \in A \cup B$ . נחלק למקרים.

$$x, y \in A \Rightarrow d(x, y) \leq \text{diam } A \leq M$$

ובצורה דומה

$$x, y \in B \Rightarrow d(x, y) \leq \text{diam } B \leq M$$

$$x \in A, y \in B \Rightarrow d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \leq \text{diam } A + d(a, b) + \text{diam } B = M$$

ובצורה דומה

$$x \in B, y \in A \Rightarrow d(x, y) \leq d(y, a) + d(a, b) + d(x, y) \leq \text{diam } A + d(a, b) + \text{diam } B = M$$

בכל המקרים הוכחנו ש- $\text{diam } A \cup B \leq M < \infty$ .

3. גלגול של קבוצת קנטור: נסמן ב- $X$  את אוסף כל הסדרות האינסופיות שאיבריהן שייכים לקבוצה  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ . עבור  $w = \{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}, u = \{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  נגדיר

$$\kappa(w, u) := \begin{cases} \min_{i \in \mathbb{N}} \{i \in \mathbb{N} \mid w_i \neq u_i\} & w \neq u \\ \infty & w = u \end{cases}$$

ונגדיר את הפונקציה הבאה  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  ע"י:

$$d(w, u) = \begin{cases} 0 & x = y \\ p^{-\kappa(w, u)} & x \neq y \end{cases}$$

עבור  $p \geq 1$  כלשהו.

(א) הוכיחו כי  $d$  היא אולטרה מטריקה על  $X$ .

הוכחה: נוכיח רק את אי שיויון המשולש החזק (כי השאר קל). שימו לב שבמבחן אתם תצטרכו להוכיח את כל התנאים אלא אם יגדירו אחרת! נרצה להראות שעבור כל  $w = \{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}, u = \{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}, v = \{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  מתקיים:

$$d(w, v) \leq \max(d(w, u), d(u, v)).$$

נכתוב את זה באופן מפורש ונקבל:

$$p^{-\kappa(w, v)} \leq \max(p^{-\kappa(w, u)}, p^{-\kappa(u, v)})$$

אם צד שמאל הוא 0 אז זה בפירוש נכון. כדי שצד ימין יהיה אפס צריך להתקיים  $w = u = v$  שגורר  $d(w, v) = 0$  ויעשה את הטענה נכונה גם כן. לכן, נניח שאף אחד מהצדדים אינו 0 וניקח  $\log_p$  של שני הצדדים. שימו לב שזו פונקציה מונוטונית עולה ולכן אי השיויון ופעולת ה- $\max$  נשמרת:

$$-\kappa(w, v) \leq \max(-\kappa(w, u), -\kappa(u, v))$$

נכפיל ב-1 ונקבל

$$k(w, v) \geq \min(k(w, u), k(u, v))$$

בשלילה, נניח שזה לא נכון, כלומר

$$k(w, v) < \min(k(w, u), k(u, v))$$

נסמן  $\kappa(w, v) := i$ : לפי ההגדרה של  $\kappa$ , מתקיים  $w_i = u_i$  וגם  $v_i = u_i$ . באופן זה נסיק ש- $w_i = v_i$ . עם זאת, זה לא הגיוני עם ההגדרה של  $i$  - סתירה.  
הערה: כאשר  $n = 2$ , כלומר הסדרות מקבלות ערכים בינאריים, אז  $X$  נקרא מרחב קנטור ויסומן כ- $C$ . נתמקד רק בו מעכשיו. לצורכי התרגיל הבא, נסמן גם עבור  $n \neq 2$

(ב) חשבו את המרחק בין הסדרה  $x_i := i \pmod{2}$  והסדרה  $y_i := 0$   
פתרון: אם אנחנו מתחילים לספור מ-0 אז די ברור ש- $x_0 = y_0 = 0$  אבל  $x_1 \neq y_1$   
 ולכן  $d(\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}) = p^{-1}$   
 (ג) נגדיר את הקבוצה

$$A := \left\{ \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in C \mid \limsup_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^i x_j > 0 \right\}$$

חשב את המרחק של הקבוצה הזו מ- $\{y_i\}$  שהוגדרה קודם לכן.  
פתרון: נגדיר את הסדרות

$$H_i^j := \begin{cases} 0 & i < j \\ 1 & i \geq j \end{cases}$$

קל לראות שלכל  $j \in \mathbb{N}$  מתקיים  $\{H_i^j\}_{i \in \mathbb{N}} \in A$ . בנוסף, אפשר גם לראות בקלות ש-

$$d(\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{H_i^j\}_{i \in \mathbb{N}}) = p^{-j}.$$

זה נכון לכל  $j \in \mathbb{N}$  ולכן

$$0 \leq d(\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}, A) \leq \inf_{j \in \mathbb{N}} d(\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{H_i^j\}_{i \in \mathbb{N}}) \leq \inf_{j \in \mathbb{N}} p^{-j} = 0,$$

בעצם הראנו ש- $d(\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}, A) = 0$ .

(ד) אתגר: הוכיחו שאף נקודה במרחב קנטור אינה מבודדת. רמז: אפשר להעזר במשפט מההרצאה.

4. הגדרנו בכיתה את המטריקה ה- $p$  - אדית באופן הבא: עבור  $p \in \mathbb{N}$  ראשוני, מגדירים  $k(x, y) = \max\{i : p^i \mid (x - y)\}$

$$d_p(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{1}{p^{k(x, y)}} & x \neq y \end{cases}$$

הוכיחו שזו אכן אולטרה-מטריקה. עשו זאת ישירות וגם באמצעות התרגיל הקודם.  
הוכחה ישירה: נוכיח רק את אי-שיוויון המשולש החזק. יהיו  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . נראה ש-

$$d_p(a, c) \leq \max(d_p(a, b), d_p(b, c)).$$

כמו בתרגיל הקודם, אפשר להניח שאף אחד מהאגפים אינו 0.  
 נרשום את הנוסחה במפורש:

$$p^{-\kappa(a, c)} \leq \max(p^{-\kappa(a, b)}, p^{-\kappa(b, c)}).$$

כעת נפעיל את אותו הטריק של  $\log_p$  וההכפלה ב-1 ונקבל

$$\kappa(a, c) \geq \min(\kappa(a, b), \kappa(b, c)) := i$$

אז לפי הגדרה מתקיים  $a - b$  וגם  $p^i \mid b - c$  ולכן  $p^i \mid (a - b + b - c)$  כלומר  $p^i \mid a - c$  לפי הגדרה מתקיים  $i \leq \kappa(a, c)$  כמו שרצינו.

הוכחה באמצעות התרגיל הקודם:

נגדיר פונקציה  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow C_p$  על ידי שליחת כל מספר ליצוג שלו בבסיס  $p$  בסדר הפוך. לדוגמה במקרה של  $z = 6$  ו- $p = 2$  נקבל ש- $\varphi(z) = 011$ .

באופן פורמלי, אפשר להציג כל טבעי באופן יחיד כ- $\sum_{i=0}^k a_i p^i$  כאשר  $a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ . נגדיר את  $\varphi$  על ידי

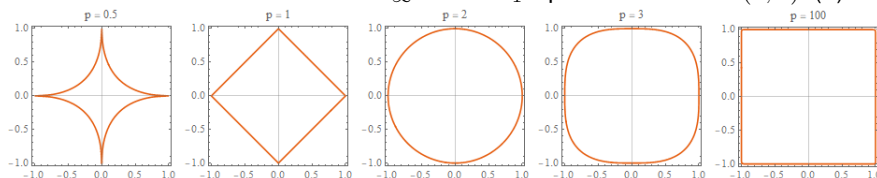
$$\varphi(z) := \begin{cases} a_0 a_1 \dots a_k 000 \dots & z \geq 0 \\ a_0 a_1 \dots a_k (p-1)(p-1)(p-1) \dots & z < 0 \end{cases}$$

קל לראות (תשלימו בעצמכם) שזה שיכון איזומטרי בין  $\mathbb{Z}$  ו- $C_n$  שכבר ראינו שהוא אולטרה-מטרי, ולכן כך גם  $(\mathbb{Z}, d_p)$ .

5. מצאו את הכדורים הבאים

(א) כדור פתוח בקוטר  $\frac{\pi}{2}$  על ספרה ברדיוס 1 - בעצם זו בדיוק המיספרה.

(ב)  $B(0, 1)$  על  $\mathbb{R}$  עם מטריקת  $d_1$  וגם עם  $d_\infty$



(ג)  $B_{d_3}(0, \frac{2}{5})$  במרחב  $(\mathbb{Z}, d_3)$

$$z \in B(0, \frac{2}{5}) \iff d(0, z) \leq \frac{2}{5} \iff k(0, z) \geq 1 \iff 3^1 \mid z$$

$$B(0, \frac{2}{5}) = 3\mathbb{Z}, \text{ כלומר}$$

(ד) אתגר: סווגו את כל הכדורים במרחב ה- $p$ -אדי.

6. למרחב מטרי, הוכיחו או הפריכו את הדברים הבאים:

(א)  $y \in B(x, r_2) \iff d(x, y) < r_2 \Rightarrow B(x, r_1) \supseteq B(x, r_2)$  הוכחה:  $r_1 > r_2 \Rightarrow d(x, y) < r_2 \Rightarrow d(x, y) < r_1 \iff y \in B(x, r_1)$

(ב)  $B(x, 1) = B(x, 2)$  הפרכה:  $r_1 > r_2 \Leftarrow B(x, r_1) \supseteq B(x, r_2)$  במרחב דיסקרטי  $B(x, 2)$

(ג)  $y = 0, x = \frac{1}{4}, r_1 = 1, X = [0, 1]$  הפרכה:  $r_1 > r_2 \Leftarrow B(x, r_1) \supseteq B(y, r_2)$   $\frac{1}{3}, r_2 = \frac{1}{2}$

7. הוכיחו שבאולטרמטריקה, כל נקודה בתוך כדור היא המרכז שלו

הוכחה:

נניח ש- $x \in X$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$  ו- $y \in B(x, r)$ . נראה ש- $B(x, r) = B(y, r)$ . נניח ש- $z \in B(x, r)$  נראה ש- $z \in B(y, r)$  לפי אי שיוויון המשולש החזק:

$$d(x, z) \leq \max d(x, y), d(y, z) \leq r$$

לפי הגדרה,  $z \in B(x, r)$ . ההכלה השנייה דומה.

8. על כל אחת מהסדרות הבאות קבעו אם היא מתכנסת ולאן במטריקה ה- $p$ -אדית

(א)  $p^n$ , כן, מתכנסת ל-0

(ב)  $a^n$  מתכנס רק אם  $a < p$ , ובמקרה זה ההתכנסות היא ל-0.

(ג)  $n!$  מתכנס ל-0

(ד)  $\sum_{i=0}^n p^i$  מתכנס ל- $\frac{1}{1-p}$ . שימו לב שרק אם  $p = 2$  הגבול הזה קיים בשלמים.

9. מצאו סדרה ב- $l_\infty$  שמתכנסת בכל רכיב אבל לא במטריקה של המרחב

תשובה: נגדיר  $\delta_i^j := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$  ונגדיר  $\delta^j := \{\delta_i^j\}_{i \in \mathbb{N}}$ . קל לראות שהסדרה הזו שואפת ל-0 בכל איבר אבל לא במטריקה של  $l_\infty$ .

10. האם שיכון איזומטרי בין מרחב לעצמו הוא בהכרח על (כלומר איזומטריה)?

תשובה: לא, אפשר לדוגמה לקחת את  $X = [0, \infty)$  ואת  $f : X \rightarrow X$  שמוגדרת ע"י  $f(x) := x + 1$ .

אפשר גם לתת דוגמה חסומה,  $f : l_\infty \rightarrow l_\infty$  שמוגדרת ע"י  $f((x_0, x_1, \dots)) := (0, x_0, x_1, \dots)$  (כלומר פונקציית ההזזה).

(א) אתגר: האם תשובתך תשתנה אם נסתכל רק על קבוצות חסומות ב- $\mathbb{R}^n$  עם המטריקה האוקלידית?