תרגיל 3 אינפי 3 - תיכוניסטים

1. תהי $E \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה קומפקטית. נגדיר $f : E \to \mathbb{R}$ על ידי

$$f(x,y) = x^2 + cos^2(e^{\frac{x}{y}})$$

הוכח כי קיים $0 < M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $(x,y) \in E$ מתקיים $M \leq f(x,y)$.
רמז: אין צורך לעשות חישובים מסובכים.

2. (א) תהי $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת על תחום D, רציפה לפי x (כלומר לכל y' הפונקציה $g(x) = f(x,y')$ רציפה) ורציפה במידה שווה לפי y (כלומר לכל x' הפונקציה $h(y) = f(x',y)$ רציפה במידה שווה). הוכח כי $f(x,y)$ רציפה ב D.

(ב) האם הפונקציה $f(x,y) = \cos\frac{1}{1-x^2-y^2}$ רציפה במידה שווה על התחומים הבאים?

i.

$$D_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$$

ii.

$$D_2 = \{(x,y) \mid 3 < x^2+y^2 < 4\}$$

3. תהינה

$$\begin{aligned} g &: D_g \to \mathbb{R}^m \quad (D_g \subseteq \mathbb{R}^n) \\ f &: D_f \to \mathbb{R}^k \quad (D_f \subseteq \mathbb{R}^m) \end{aligned}$$

פונקציות רציפות במידה שווה על D_f, D_g בהתאמה. בנוסף, נניח כי $Im(g) \subseteq D_f$.
הוכח כי ההרכבה fg רציפה במידה שווה על D_g.

4. תהי $f : D \to \mathbb{R}$ רציפה על D, כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^n$. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

(א) תהינה

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: [0,1] \to D \\ \gamma_2 &: [0,1] \to D \end{aligned}$$

שתי מסילות רציפות כך ש

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a \quad \gamma_1(1) = \gamma_2(1) = b$$

אזי, קיים $t \in (0,1)$ עבורו

$$f(\gamma_1(t)) = f(\gamma_2(t))$$

(ב) תהינה

$$\begin{aligned}\gamma_1 &: [0,1] \to D \\ \gamma_2 &: [0,1] \to D\end{aligned}$$

שתי מסילות רציפות כך ש

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(1) = a \quad \gamma_1(1) = \gamma_2(0) = b$$

אזי, קיים $t \in [0,1]$ **עבורו**

$$f(\gamma_1(t)) = f(\gamma_2(t))$$

5. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות בכל נקודה בה הן מוגדרות:

(א) $f(x,y) = x^3 + 3y^2 - \frac{x}{y}$

(ב) $f(x,y) = e^{\cos(xy)}$

(ג) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(ד) $f(x,y,z) = \ln(x^3+y^3-z^3)$

6. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה. האם הן רציפות ב $(0,0)$**?**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$