עקומות ומשטחים

הגדרה

עקומה פרמטרית ב$\mathbb{R}^n$ היא העתקה (C^k, $k\geq 1$ בד"כ)

$$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$$

$$t\mapsto\gamma(t)$$

ניתן לחשוב על עקומה בתור מסלול שחלקיק מבצע לאורך זמן(t)

הגדרה

אם γ גזירה בt_0 אזי הווקטור $\gamma'(t_0)$ נקרא הוקטור המשיק לעקומה γ בזמן t_0. שם אחר הוא וקטור מהירות(Velocity Vector), שכן $\|\gamma'(t)\|$ זו המהירות(Speed)

דוגמאות

1. ישר ב$\mathbb{R}^n$.

$$\gamma(t)=\vec{a}+t\vec{v}$$

$\vec{a}$: נקודה התחלתית
$\vec{v}$: וקטור כיוון
($t\in[a,b]$), במקרה הזה נגיד $-\infty<t<\infty$
הווקטור המשיק הוא $\gamma'(t)=\vec{v}$ - אינו משתנה עם הזמן.

2. מעגל: ניתן להציג בצורה סתומה ע"י $x^2+y^2=R^2$, ובצורה פרמטרית ע"י $\begin{cases} x=R\cos t\\ y=R\sin t\end{cases}$.
נגדיר

$$\gamma:[0,2\pi]\mapsto(R\cos t,R\sin t)$$

הווקטור המשיק הוא

$$\gamma'(t)=(-R\sin t,R\cos t)$$

משתנה עם הזמן!

$$\gamma'(0)=(0,R)\qquad\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-R,0)$$

תרגיל

מצא הצגה פרמטרית עבור הפרבולה $y = x^2$ במישור, ומצא הצגה פרמטרית של הישר l המשיק בנק' $(1,1)$.

פתרון

y נתון כפונקציה של x, ולכן יש פרמטריזציה טבעית $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ - x חופשי וy נקבע על ידו

$$\gamma(t) = \left(t, t^2\right) \qquad -\infty < t < \infty$$

כדי למצוא הצגה פרמטרית של המשיק אנו זקוקים לנקודה a שעליו[$(1,1)$] ולווקטור כיוון $\gamma'(t) = (1,2t)$, ובנקודה הרלוונטית(שבה $t=1$)

$$\gamma'(1) = (1,2) =: \vec{v}$$

$$\Rightarrow l = \{a + t\vec{v} | -\infty < t < \infty\} = \boxed{\{(1+t, 1+2t) | -\infty < t < \infty\}}$$

משטחים

הגדרה

משטח ב$\mathbb{R}^3$ הוא העתקה (C^k)

$$r(u,v) : D \to \mathbb{R}^3$$

הגדרה

וקטורי הנגזרת r_u, r_v בנקודה p נקראים משיקים למשטח בנקודה זו, והspan שלהם נותן את המישור המשיק T_pM.

דוגמאות

1. המישור שבו $z = 6$. יש לנו פרמטריזציה

$$r(u,v) = (u,v,6) \qquad \begin{matrix} -\infty < u < \infty \\ -\infty < v < \infty \end{matrix}$$

הווקטורים המשיקים הם:

$$\begin{cases} r_u = (1,0,0) \\ r_v = (0,1,0) \end{cases}$$

2. $M=\left\{z=x^2+y^2\right\}$. נגדיר פרמטריזציה:

$$r\left(u,v\right)=\left(u,v,u^2+v^2\right)$$

הווקטורים המשיקים הם:

$$r_u=\left(1,0,2u\right)\qquad r_v=\left(0,1,2v\right)$$

3. גליל: $x^2+y^2=1$(במישור←מעגל. במרחב←גליל)

$$\begin{matrix}0<u\leq 2\pi\\ -\infty<v<\infty\end{matrix}\qquad \gamma\left(u,v\right)=\left(\cos u,\sin u,v\right)$$

תרגיל: מצא את משוואת המישור המשיק בנקודה $p=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},3\right)$

פתרון: הווקטורים המשיקים הם:

$$r_u\left(u,v\right)=\left(-\sin u,\cos u,0\right)\qquad r_v\left(u,v\right)=\left(0,0,1\right)$$

אנו מעוניינים בנקודה p, שמתקבלת כאשר

$$\begin{cases}u=\frac{\pi}{4}\\ v=3\end{cases}$$

[כי $p=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},3\right)=\gamma\left(\frac{\pi}{4},3\right)$]

הווקטורים המשיקים בנק' p הם

$$r_u\left(\frac{\pi}{4},3\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\qquad r_v\left(\frac{\pi}{4},3\right)=\left(0,0,1\right)$$

הspan שלהם הוא

$$\boxed{T_pM=\left\{\alpha\cdot r_u\left(\frac{\pi}{4},3\right)+\beta\cdot r_v\left(\frac{\pi}{4},3\right)=\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{2}},\frac{\alpha}{\sqrt{2}},\beta\right)\middle|\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}}$$