תרגיל בית 10 -מתמטיקה בדידה

שאלה 1. יהי X, Y קבוצות לא ריקות. נגדיר את $\mathcal{F}(X,Y)$ להיות קבוצת כל הפונקציות מ-X ל-Y. יהי $a \in X$ איבר נתון. כעת נגדיר:

$$\Phi\colon \mathcal{F}(X,Y) \to Y$$

על ידי $\Phi(f) = f(a)$

(1) הראו כי Φ מוגדרת היטב.
(2) האם Φ היא חח"ע? האם היא על?

פתרון. ראו תרגול חזרה!

שאלה 2. עבדו מעל ZFC . יהי A, B קבוצות לא ריקות, נסתכל על הקבוצה הבאה:

$$\mathrm{pf} := \{f\colon A' \to B\colon A' \subseteq A, \text{ חח"ע f}\}$$

(1) הראו כי pf לא ריקה
(2) הוכיחו כי קיימת פונקציה חח"ע מ-A ל-B או קיימת פונקציה מ-A על B. (רמז: הראו כי עבור כל שרשרת C בקס"ח $(\mathrm{pf}, \subseteq)$, $\bigcup C$ היא פונקציה חח"ע)

פתרון.

(1) נשים לב כי הפונקציה הריקה שייכת ל-pf וחח"ע באופן ריק.
(2) **תת-טענה:** לכל ל שרשרת C בקס"ח $(\mathrm{pf}, \subseteq)$, $\bigcup C$ היא פונקציה חח"ע.
הוכחה. יהי C שרשרת בקס"ח, נבקש להראות כי $f = \bigcup C$ היא פונקציה חח"ע.
(א) f היא פונקציה: נראה כי f היא פונקציה מ-$\mathrm{dom}(f)$ ל-B.
(i) צ"ל: $\mathrm{Im}(f) \subseteq B$. נשים לב כי:

$$\mathrm{Im}(f) = \bigcup_{g \in C} \mathrm{Im}(g) \subseteq B$$

(השוויון האחרון נכון מכיוון שכל $g \in C$; $\mathrm{Im}(g) \subseteq B$ לפי הגדרה).
(ii) נראה כי f חד-ערכית: יהי $a \in \mathrm{dom}(f)$ מהגדרת f מתקיים:

$$\mathrm{dom}(f) = \bigcup_{g \in C} \mathrm{dom}(g)\ (\subseteq A))$$

לכן, קיים $g \in C$ כך ש- $a \ni g$. אבל, g היא פונקציה ולכן קיים ביחידות b כך ש-$g(a) = b$.
בנוסף , לכל $g \subseteq g'$ מתקיים $b = g'(a)$. מכאן נובע כי $b = f(a)$ ביחידות.
(ב) f היא חח"ע: יהי $a_0, a_1 \in \mathrm{dom}(f)$ ונניח $f(a_0) = f(a_1)$.

$$a_0, a_1 \in \mathrm{dom}(f) \ \Rightarrow\ \exists g \in C\colon a_0, a_1 \in \mathrm{dom}(g) \ \Rightarrow g(a_0) = f(a_0) = f(a_1) =$$
$$= g(a_1) \ \Rightarrow_{\text{g חח"ע}} a_0 = a_1$$

תהי C שרשרת מקסימלית, נסתכל על $f = \bigcup C$. לפי תת-הטענה f הינה חח"ע. **תת-טענה 2:** אם f לא על B אזי $\mathrm{dom}(f) = A$

הוכחה. נניח שלא, אזי קיים $a \in A \setminus \mathrm{dom}(f)$, ומכיוון של f לא על אזי קיים $b \in B \setminus \mathrm{Im}(f)$ כעת נגדיר $f' = f \cup \{(a,b)\}$. זוהי פונקציה חח"ע מ- $\mathrm{dom}(f) \cup \{a\}$ ל-B (למה?). לכן נוכל להגיד $C' = C \cup \{f'\}$ שרשרת גדולה ממש מהשרשרת המקסימלית בסתירה.

כעת אם f לא על, אזי קיבלנו פונקציה חח"ע מ-A ל-B כמבוקש. אחרת, יהי $b \in B$, נגדיר f' מ-A ל-B באופן הבא:

$$f'(a) = \begin{cases} f(a) & \text{if} \quad a \in \mathrm{dom}(f) \\ b & else \end{cases}$$

f' אכן מקיימת הדרוש (למה?) . סיימנו.

שאלה 3. עבור מספר טבעי n, נאמר שפונקציה $f : n \to \mathbb{N}$ דוחסת אמ"מ לכל $m < n$ מתקיים: $f(m) \le m$. הוכיחו או הפריכו: קיים k טבעי עבורו f^k פונקציה קבועה. ($f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{\text{k פעמים}}$).

פתרון. נסתכל על $f : 3 \to \mathbb{N}$:

$$f(n) = n$$

עבור $k \ge 2$ נקבל כי: $f^k(n) = n$ שהיא אינה קבועה (למה?). (שאלה: מה לגבי אם נדרוש; לכל כל $m < n$ מתקיים: $f(m) < m$?)

שאלה 4. נסתכל על היחס f מ-$\mathbb{N}$ ל-$\mathbb{Z}$ המוגדר באופן הבא:

$$f(n) = \frac{(-1)^n(2n-1)+1}{4}$$

(1) הראו כי f היא פונקציה.

(2) האם f חח"ע? האם היא על?

פתרון.

(1) (א) $\underline{\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{Z}}$: עבור n טבעי, אם $n = 2m$, נחשב:

$$f(n) = \frac{(-1)^n(2n-1)+1}{4} = \frac{(2n-1)+1}{4} = \frac{4m}{4} = m \in \mathbb{Z}$$

אחרת $n = 2m+1$ ושוב נחשב:

$$f(n) = \frac{(-1)^n(2n-1)+1}{4} = \frac{2-2n}{4} = \frac{-4m}{4} = -m \in \mathbb{Z}$$

לכן, סה"כ: $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{Z}$ כדרוש.

(ב) f <u>חד ערכית</u>: כפל וחילוק על מספרים שלמים מוגדר היטב ולכן f חד-ערכית.

(2) f <u>חד-חד ערכית</u>: יהי $m, n \in \mathbb{N}$ כך ש- $f(n) = f(m)$ נבקש להראות כי $n = m$. נשים לב כי אם $f(n) = 0$ אזי:

$$\frac{(2n-1)+1}{4} = 0 \Rightarrow n = 0$$

ולכן $n = m$ כדרוש. כעת נניח $f(n) \neq 0$: מהחישוב להעיל, נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות כי m, n זוגיים ולכן נחשב:

$$\frac{(2n-1)+1}{4} = \frac{(2m-1)+1}{4} \Rightarrow n = m$$

כדרוש.

(3) f <u>על</u>:

יהי $z \in \mathbb{Z}$ נחפש $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $f(n) = z$. לשם כך ניפתור את המשוואה הבאה:

$$(*) \quad \frac{(-1)^n(2n-1)+1}{4} = z$$

אם z חיובי אזי נבחר $n=2m$ וכדי למצור את m נציב ב-* ונפתור. אם z שלילי אזי נבחר $n=2m+1$ נציב ב-* ונפתור המשוואה. אם $z=0$ כבר ראינו כי $f(0)=z$. סה"כ נקבל:

(א) עבור z חיובי: $n=z\in\mathbb{N}$

(ב) עבור z שלילי: $n=-z\in\mathbb{N}$

הערה: ניתן לראות זאת כבר מהחישוב בסעיף (1) (ניתן אלגוריתם כללי לפתרון שאלות מהסוג).

שאלה 5. יהיו A,B,C,D קבוצות לא ריקות, ונניח כי $f\colon A\to B$, $g\colon C\to D$ פונקציות חח"ע. הוכיחו כי היחס h מ-$A\times C$ ל-$B\times D$ המוגדר באופן הבא עבור $(a,c)\in A\times C$:

$$h((a,c)):=(f(a),g(c))$$

הוא פונקציה חח"ע.

פתרון.

ראשית נראה כי h הנ"ל היא פונקציה:

(1) $\underline{\mathrm{dom}(h)=A\times C:}$ מתקיים:

$$\mathrm{dom}(h)=\mathrm{dom}(f)\times\mathrm{dom}(g)=_{\text{פונקציות f,g}}A\times C$$

(2) $\underline{\mathrm{Im}(h)\subseteq B\times D:}$ שוב, מתקיים:

$$\mathrm{Im}(h)=\mathrm{Im}(f)\times\mathrm{Im}(g)\subseteq_{\text{פונקציות f,g}}B\times D$$

(3) $\underline{h \text{ חד-ערכית:}}$ עבור $(a,c)\in A\times C$ $f(a),g(c)$ נקבעות ביחידות מכיוון ש- f,g חד-ערכיות ולכן $(f(a),g(c))$ נקבעת ביחידות.

כעת, נראה כי h חח"ע: יהי $(a_0,c_0),(a_1,c_1)\in A\times C$ ונניח $h((a_0,c_0))=h((a_1,c_1))$ נבקש להראות כי $(a_0,c_0)=(a_1,c_1)$. מתקיים:

$$h((a_0,c_0))=h((a_1,c_1))\ \Rightarrow\ (f(a_0),g(c_0))=(f(a_1),g(c_1))\ \Rightarrow\ (f(a_0)=f(a_1))\wedge$$
$$(g(c_0)=g(c_1))\ \Rightarrow_{\text{g,f חח"ע}}\ (a_0=a_1)\wedge(c_0=c_1)$$

לכן, $(a_0,c_0)=(a_1,c_1)$ כדרוש.

שאלה 6. מצאו פונקציה חח"ע מקבוצת הסדרות הבינאריות הסופיות ל-$\mathbb{N}$.

פתרון. יהי $\langle p_i:\ i\in\mathbb{N}\rangle$ מנייה של הראשוניים. נסמן את קבוצת הסדרות הבינאריות הסופיות ב-A ונגדיר $f\colon A\to\mathbb{N}$ באופן הבא:

(*) $f(a)=\prod_{k=0}^{\mathrm{length}(a)}p_k^{1+a(i)}$, $(\mathrm{length}(a)=\text{ a אורך הסדרה})$

זוהי אכן פונקציה מקבוצת הסדרות הבינאריות ל- $\mathbb{N}$ (הוכיחו זאת). כעת, נראה כי היא חח"ע: יהי $a,b\in A$ כך ש- $f(a)=f(b)$ נבקש להראות כי $a=b$. מתקיים:

$$p_0^{1+a(0)}\cdot p_1^{1+a(1)}\cdots p_{\mathrm{length}(a)}^{1+a(\mathrm{length}(a)-1)}=p_0^{1+b(0)}\cdot p_1^{1+b(1)}\cdots p_{\mathrm{length}(b)}^{1+b(\mathrm{length}(b)-1)}$$

ראשית, נשים לב כי $\mathrm{length}(a)=\mathrm{length}(b)$ אחרת נניח בה"כ כי $\mathrm{length}(a)<\mathrm{length}(b)$ אזי נסתכל על $i=\mathrm{length}(b)-1$ נקבל כי:

$$p_i\mid p_0^{1+b(0)}\cdot p_1^{1+b(1)}\cdots p_{\mathrm{length}(b)}^{1+b(\mathrm{length}(b)-1)}\ \Rightarrow_{\text{מ(*)}}\ p_i\mid p_0^{1+a(0)}\cdot p_1^{1+a(1)}\cdots p_{\mathrm{length}(a)}^{1+a(\mathrm{length}(a)-1)}$$

אבל, לכל $j<\mathrm{length}(a)$ מתקיים כי $p_i\neq p_j$ ולכן:

$$p_i \nmid p_0^{1+a(0)} \cdot p_1^{1+a(1)} \cdots p_{\text{length}(a)}^{1+a(\text{length}(a)-1)}$$

בסתירה. נסמן $k = \text{length}(a) = \text{length}(b)$. יהי $i < k$ נראה כי $a(i) = b(i)$. שוב מ-(*) נקבל:

$$p_i^{1+b(i)} \mid p_0^{1+a(0)} \cdot p_1^{1+a(1)} \cdots p_{\text{length}(a)}^{1+a(\text{length}(a)-1)} \Rightarrow_{\text{תכונת הראשוניים}} p_i^{1+b(i)} \mid p_i^{1+a(i)}$$

מצד שני,

$$p_i^{1+a(i)} \mid p_0^{1+b(0)} \cdot p_1^{1+b(1)} \cdots p_{\text{length}(b)}^{1+b(\text{length}(b)-1)} \Rightarrow_{\text{תכונת הראשוניים}} p_i^{1+a(i)} \mid p_i^{1+b(i)}$$

לכן, סהכ:

$$p_i^{1+a(i)} = p_i^{1+b(i)}$$

ולכן: $a(i) = b(i)$ כדרוש.

שאלה 7. נסתכל על:

$$\mathbf{P}_2 := \{P \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) : \text{חלוקה בעלת שני איברים P}\}$$

מצאו פונקציה חח"ע מ- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ל-$\mathbf{P}_2$.

פתרון.

נגדיר $f : \mathcal{P}(\mathbb{N} \setminus \{0,1\}) \to \mathbf{P}_2$ על ידי: $f(A) = \{A \cup \{1\}, A^c \cup \{0\}\}$.

נראה כי f פונקציה:

(1) $\underline{\text{Im}(f) \subseteq \mathbf{P}_2}$: יהי $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \setminus \{0,1\})$ נבקש להראות כי $f(A)$ חלוקה על $\mathbb{N}$.

(א) $\bigcup f(A) = A \cup \{1\} \cup A^c \cup \{0\} = \mathbb{N}$

(ב) קל לראות כי כל שתי קבוצות שונות ב-$f(A)$ זרות בזוגות.

(2) $\underline{f \text{ חד-ערכית}}$: נשים לב כי עבור $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \setminus \{0,1\})$ המשלים נקבע ביחידות ולכן $f(A)$ נקבע ביחידות.

כעת, נראה חח"ע: יהי $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \setminus \{0,1\})$ ונניח $f(A) = f(B)$ נבקש להראות כי $A = B$. מתקיים:

$$\{A \cup \{1\}, A^c \cup \{0\}\} = \{B \cup \{1\}, B^c \cup \{0\}\}$$

משוויון קבוצות נקבל כי בדיוק אחת מהאופציות הבאות מתקיימת:

(1) $A \cup \{1\} = B \cup \{1\}$

(2) $A \cup \{1\} = B^c \cup \{0\}$

נשים לב כי (2) מוביל לסתירה היות ו-0 לא שייך ל-A לפי הגדרה. ולכן (1) חייבת להתקיים. אבל אז ברור כי $A = B$ כדרוש.

כעת נרכיב את f על פונקציה חח"ע מ-$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ל-$\mathcal{P}(\mathbb{N} \setminus \{0,1\})$ ונסיים. (מצאו פונקציה כזאת).

(שאלה: הראו כי קיימת פונקציה חח"ע ועל)

שאלה 8. יהי A, B קבוצות, ו-fפונקציה מ-A ל-B. עבור $A_0, A_1 \subseteq ofA$, $B_0, B_1 \subseteq ofB$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(1) $f^{-1}[B_0 \cup B_1] = f^{-1}[B_0] \cup f^{-1}[B_1]$

(2) $f[A_0 \cup A_1] = f[A_0] \cup f[A_1]$

(3) $f^{-1}[B_0 \cap B_1] = f^{-1}[B_0] \cap f^{-1}[B_1]$

פתרון.

(1) הוכחה: $f^{-1}[B_0 \cup B_1] = \{a \in A \colon f(a) \in B_0 \cup B_1\} = \{a \in A \colon f(a) \in B_0\} \cup \{a \in A \colon f(a) \in B_1\} = f^{-1}[B_0] \cup f^{-1}[B_1]$

(2) הוכחה: $f[A_0 \cup A_1] = \{f(a) \colon a \in A_0 \cup A_1\} = \{f(a) \colon a \in A_0\} \cup \{f(a) \colon a \in A_1\} = f[A_0] \cup f[A_1]$

(3) הוכחה: $f^{-1}[B_0 \cap B_1] = \{a \in A \colon f(a) \in B_0 \cap B_1\} = \{a \in A \colon f(a) \in B_0\} \cap \{a \in A \colon f(a) \in B_1\} = f^{-1}[B_0] \cap f^{-1}[B_1]$