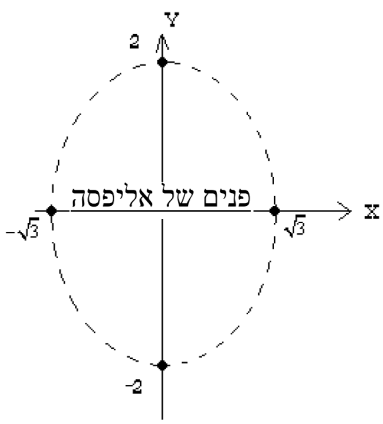
<u>פונקציות מרוכבות</u>
<u>תרגיל בית מס' 1 - פתרון</u>

1. שרטטו את קבוצות הנקודות:
   א. $|z-i|+|z+i|<4$
   ב. $\operatorname{Re}\dfrac{z-a}{z+a}=0$, $a\in\mathbb{R}$
   ג. $\operatorname{Im}\dfrac{z-1}{z+1}=0$
   ד. $|z+i|=2|z-i|$
   ה. $|z-1|>|z+i|$
   ו. $|z-1+i|\le 2$

<u>פתרון:</u>

א).



$$|z-i|+|z+i|<4$$
$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}<4$$
$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}<4-\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$
$$x^2+(y-1)^2<16-8\sqrt{x^2+(y+1)^2}+x^2+(y+1)^2$$
$$8\sqrt{x^2+(y+1)^2}<16+4y$$
$$2\sqrt{x^2+(y+1)^2}<4+y$$
$$4\left(x^2+(y+1)^2\right)<16+8y+y^2$$
$$4x^2+4y^2+8y+4<16+8y+y^2$$
$$4x^2+3y^2<12$$
$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}<1$$

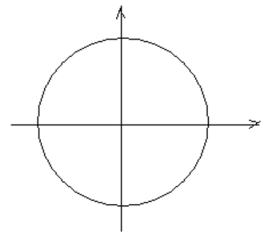
ב).

$$\operatorname{Re}\frac{z-a}{z+a}=0$$
$$\operatorname{Re}\frac{z-a}{z+a}=\operatorname{Re}\frac{(x-a)+iy}{(x+a)+iy}=\operatorname{Re}\frac{\left[(x-a)+iy\right](x+a-iy)}{(x+a)^2+y^2}=\frac{\left(x^2-a^2\right)+y^2}{\left(x^2+a^2\right)+y^2}=0$$

$\nearrow$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $x^2-a^2+y^2=0$

$$x^2+y^2=a^2$$

בהנחה ש a ממשי



מעגל עם מרכז ב- $z=0$ ורדיוס $r=a$

בלי נקודה $(-a,0)$, כי $z\neq -a$ (בשרטוט במקום זה צריכה להיות נקודה ריקה)

ג).

$$\operatorname{Im}\frac{z-1}{z+1}=\frac{y(x+1)-y(x-1)}{(x+1)^2+y^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x+1)-y(x-1)=0$$

$$2y=0$$

$$y=0$$

$\Leftarrow$ ציר ה x בלי נקודה $(-1,0)$, כי $z\neq -1$.

ד).

$$|z+i|=2|z-i|$$

$$x^2+(y+1)^2=4\left(x^2+(y-1)^2\right)$$

$$x^2+y^2+2y+1=4x^2+4y^2-8y+4$$

$$3x^2+3y^2-10y+3=0$$

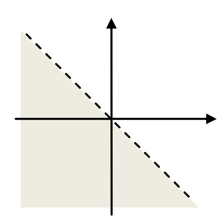
$$3x^2+3\left(y^2-2\cdot\frac{5}{3}y+\frac{25}{9}\right)-\frac{25}{3}+3=0$$

$$3x^2+3\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{16}{3}$$

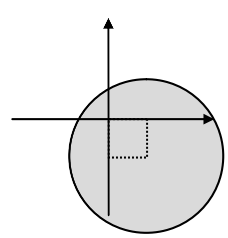
$$x^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$$

מעגל עם מרכז ב $z=\frac{5}{3}i$ ורדיוס $r=\frac{4}{3}$.

ה).



ו).



2. על סמך הזהות $1+z+z^2+...+z^n=\dfrac{z^{n+1}-1}{z-1}$ ($z\neq 1$), הוכח כי

$$\frac{1}{2}+\cos(\theta)+\cos(2\theta)+...+\cos(n\theta)=\frac{\sin(n+1/2)\theta}{2\sin(\theta/2)}$$

<u>פתרון:</u>

אם שני מספרים מרוכבים זהים, אז הן החלקים המדומים הן החלקים הממשיים שלהם שווים בהתאמה.

נמצא $\operatorname{Re}\dfrac{z^{n+1}-1}{z-1}$:

$$\operatorname{Re}\frac{z^{n+1}-1}{z-1}=\operatorname{Re}\frac{\left(z^{n+1}-1\right)\left(\bar{z}-1\right)}{\left(z-1\right)\left(\bar{z}-1\right)}=\operatorname{Re}\left[\frac{\left(\cos\left((n+1)\theta\right)+i\sin\left((n+1)\theta\right)-1\right)\left(\cos\theta-i\sin\theta-1\right)}{\left(\cos\theta+i\sin\theta-1\right)\left(\cos\theta-i\sin\theta-1\right)}\right]=$$

$$=\frac{\cos\left((n+1)\theta\right)\cos\theta+\sin\left((n+1)\theta\right)\sin\theta-\cos\left((n+1)\theta\right)+1-\cos\theta}{2-2\cos\theta}=\frac{\cos\left(n\theta\right)+1-\cos\left((n+1)\theta\right)-\cos\theta}{2-2\cos\theta}=$$

$$=\frac{2\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\sin\frac{\theta}{2}+2\sin^2\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin(n+1/2)\theta}{2\sin(\theta/2)}$$

3. עבור $z=1+2i$, מצא (בצורה של $a+ib$, ללא שימוש בנוסחת דה-מואבר):

א. z^n, $n\in\mathbb{N}$ (כאן a ו- b הינם טורים)

ב. $\dfrac{1}{z}$

ג. $\dfrac{1}{z^n}$, $n\in\mathbb{N}$ (כאן a ו- b הינם טורים)

ד. $z^2+2z+5+i$

<u>פתרון:</u>

א). $z^n=(1+2i)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2i)^k=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k}2^{2k}+i\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k+1}2^{2k+1}$ כאשר $[x]$ הוא חלק שלם של x.

ב). $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+2i}\cdot\dfrac{1-2i}{1-2i}=\dfrac{1-2i}{5}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i$

ג). $\dfrac{1}{z^n}=\left(\dfrac{1}{z}\right)^n$, לכן לפי סעיף ב': $\dfrac{1}{(1+2i)^n}=\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i\right)^n=\dfrac{1}{5^n}(1-2i)^n$, בדומה לסעיף א' נקבל

$$\frac{1}{z^n}=\frac{1}{5^n}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k}2^{2k}-i\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k+1}2^{2k+1}\right)$$

ד). נציב ונקבל: $4+9i$.

4. הוכח כי לכל $z\in\mathbb{C}$ $\quad |z|\le|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|\le\sqrt{2}\cdot|z|$

<u>פתרון:</u>

האגף השמאלי של אי-השוויון נובע מתוך: $|z|=\sqrt{\mathrm{Re}^2 z+\mathrm{Im}^2 z}\le\sqrt{\left(|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|\right)^2}=|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|$

האגף הימני נובע מתוך אי-השוויון הטריביאלי $\left(|\mathrm{Re}\,z|-|\mathrm{Im}\,z|\right)^2\ge 0$, לכן

$$|\mathrm{Re}\,z|^2+|\mathrm{Im}\,z|^2-2|\mathrm{Re}\,z||\mathrm{Im}\,z|\ge 0 \;=>\; |z|^2\ge 2|\mathrm{Re}\,z||\mathrm{Im}\,z| \;=>$$
$$=>\; 2|z|^2\ge 2|\mathrm{Re}\,z||\mathrm{Im}\,z|+|z|^2 \;=>\; \sqrt{2}|z|\ge|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|$$

5. הוכח שמתקיים $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|<1$ עבור $a,b\in\mathbb{C}$ המקיימים $|a|<1$ ו- $|b|<1$.

<u>פתרון:</u>

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|=\sqrt{\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\cdot\overline{\left(\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right)}}=\sqrt{\frac{(a-b)\cdot(\overline{a}-\overline{b})}{(1-\overline{a}b)\cdot(1-a\overline{b})}}=\sqrt{\frac{|a|^2+|b|^2-(a\overline{b}+\overline{a\overline{b}})}{1+|ab|^2-(a\overline{b}+\overline{a\overline{b}})}}=\sqrt{\frac{|a|^2+|b|^2-2\,\mathrm{Re}\,a\overline{b}}{1+|ab|^2-2\,\mathrm{Re}\,a\overline{b}}}$$

עתה נראה כי $|a|^2+|b|^2-2\,\mathrm{Re}\,a\overline{b}<1+|ab|^2-2\,\mathrm{Re}\,a\overline{b} \;=>\; |a|^2+|b|^2<1+|ab|^2$

נניח בשלילה כי: $|a|^2+|b|^2\ge 1+|ab|^2$ **<=**

$|a|^2+|b|^2\ge 1+|a|^2\cdot|b|^2 \;=>\; |b|^2(|a|^2-1)\le(|a|^2-1) \;=>_{|a|<1}=>\; |b|^2\ge 1$ בסתירה לנתון.

לכן $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|<1$.

6. מצא:

א. $\sqrt[3]{i}$

ב. $\sqrt[5]{1-i}$

ג. $\sqrt{3-i}$

ד. $\sqrt[4]{-1}$

<u>פתרון:</u>

א). $$\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3},\; k=1,2,3.$$

ב). $$\sqrt[5]{1-i}=\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi k}{5}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi k}{5}\right),\; k=0,1,\ldots,4.$$

ג). $$\sqrt{3-i}=\ldots=\sqrt[4]{10}\left(\cos\frac{\arctan(-1/3)+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\arctan(-1/3)+2\pi k}{2}\right),\; k=0,1.$$

ד). $$\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right),\; k=0,1,2,3.$$

7. תארו באמצעות אי שוויונות (או שוויונות) את התחומים/קווים הבאים:
א. חצי מישור הנמצא מימין לציר המדומה .
ב. רביע הראשון .
ג. חצי מישור הנמצא מעל לציר הממשי ומרוחק ממנו למרחק לא פחות מ 2 .
ד. פס הכולל בתוכו את כל הנקודות המרוחקות מהציר המדומה למרחק קטן מ1 .
ה. חצי עיגול בעל רדיוס 1 לא כולל מעגל עם מרכז בנקודה $z=0$ הנמצא משמאל לציר המדומה .
ו. אוסף הנקודות הפנימיות למעגל שמרכזו ב $A(1,2)$ ורדיוסו 2 .

<u>פתרון:</u>
א. $\operatorname{Re} z > 0$
ב. $\operatorname{Re} z \ge 0 \wedge \operatorname{Im} z \ge 0$
ג. $\operatorname{Im} z \ge 2$
ד. $|\operatorname{Re} z| < 1$
ה. $|z| < 1 \wedge \operatorname{Re} z \le 0$
ו. $|z-(1+2i)| < 2$

8. פתרו את המשוואות הבאות:
א. $z^6 = 64$
ב. $5z + 2\bar{z} = 7 + 6i$
ג. $|z|^2 - 2z + 1 = 0$

<u>פתרון:</u>
א. $z^6 = 64$

$$z_k = 2cis\left(\frac{2\pi k}{6}\right) \qquad k = 0,1,2,3,4,5$$

$$\Rightarrow z_0 = 2$$

$$z_1 = 2cis\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_2 = 2cis\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_3 = 2cis(\pi) = -2$$

$$z_4 = 2cis\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_5 = 2cis\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ב. $5z + 2\bar{z} = 7 + 6i$

$$5z + 2\bar{z} = 7 + 6i$$
$$(5x + 2x) + i(5y - 2y) = 7 + 6i$$
$$\left.\begin{array}{l} 7x = 7 \ \Rightarrow \ x = 1 \\ 3y = 6 \ \Rightarrow \ y = 2 \end{array}\right\} z = 1 + 2i$$

ג. $|z|^2 - 2z + 1 = 0$

$$|z|^2 - 2z + 1 = 0 \qquad (*)$$

$$|z|^2 + 1 = 2z$$

$$\Rightarrow 2|z| = |z|^2 + 1$$

$$\Rightarrow |z|^2 - 2|z| + 1 = 0$$

$$\Rightarrow |z| = 1$$

$$\Rightarrow -2z + 2 = 0 \qquad z = 1$$

נובע מ $(*)$.