תרגול כיתה 2 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

מרחבי הסתברות ומאורעות, הסתברות מותנה

מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן

נוסחאות:

יהיו A ו-B שני מאורעות כלשהם מאותו מרחב מדגם Ω.

הסתברות מותנה: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

אי תלות בין מאורעות: $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ **או** $P(A|B)=P(A)$

חוק הכפל (השרשרת):

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\cdots P(A_n|A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})$$

כאשר: $\forall k=1...n-1$, $P(\bigcap_{i=1}^{k} A_i)>0$, A_k מאורעות.

נוסחת ההסתברות השלמה: $P(A)=\sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)$

כאשר: $i\neq j$: $B_i\cap B_j=\varnothing$, $\sum_{k=1}^{n} P(B_k)=1$

נוסחת בייס: $P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

נוסחת בייס הכללית: אם $\{B_i\}_{i\in K}$ היא חלוקה של מרחב המדגם, כאשר

$P(B_i)>0,\forall i\in K$, אז לכל מאורע A בעל הסתברות חיובית מתקיים (לכל $k\in K$)

$$P(B_k|A)=\frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}$$

תרגילים

תרגיל 1

מטילים מטבעות הוגנים בזה אחר זה על הרצפה עד להופעת עץ ראשון ואז בוחרים מטבע באקראי מהמטבעות שהוטלו. מה הסיכוי שנבחר עץ?

תרגיל 2

הסיכוי שבן אוהב ברוקולי הוא 7%. הסיכוי שבת אוהבת ברוקולי הוא 31%. מבין הקונים בחנות 70% בנות. מה הסיכוי שהקונה הבא אוהב ברוקולי?

<u>תרגיל 3</u>

אחוז החולים באוכלוסיה במחלה X הוא 1%. ישנה בדיקה לאבחון המחלה, שסיכוי הגילוי שלה של המחלה הוא 90% (כלומר אם אתה חולה אז יש 90% סיכוי שהיא תאמר לך זאת ואם אתה בריא אז יש 90% סיכוי שתאמר לך זאת). מישהו נבדק ונמצא חולה. מה הסיכוי שהוא אכן חולה?

<u>תרגיל 4</u>

מבין הפונים לדוקטורט, 45% מהבנים ו37% מהבנות התקבלו. מבין הפונים למדעי הטבע, 57% מהבנות התקבלו ו50% מהבנים, ומבין הפונים למדעי הרוח, 33% מהבנות ו-30% מהבנים התקבלו. באונ' שתי פקולטות בלבד, מדעי הטבע ומדעי הרוח.

א). מהי התפלגות הבנים הפונים לדוקטורט בין הפקולטות?

ב). מהי התפלגות הבנות?

<u>תרגיל 5</u>

בבית ספר מסוים, לפחות 90% מהתלמידים יודעים גם אנגלית וגם גרמנית, ולפחות 90% מהתלמידים יודעים גם אנגלית וגם צרפתית. הוכח כי מבין אלו שיודעים גם גרמנית וגם צרפתית, לפחות 90% יודעים אנגלית. תן חסם מלרע לאחוז התלמידים שיודעים אנגלית, צרפתית וגרמנית.

<u>תרגיל 6</u>

נסמן $\{(x_1,x_2,x_3)\in\{0,1\}^3 : x_1+x_2+x_3\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)\}$ $\Omega=$ ויהי (Ω,P) מרחב הסתברות אחיד. נסמן $A_n=\{(x_1,x_2,x_3)\in\Omega : x_n=0\}$. הוכח כי לכל $n\neq m$, A_n ו- A_m בלתי-תלויים. הראה כי $P(A_1\cap A_2\cap A_3)\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ [כלומר ששלושת המאורעות הללו אינם בלתי-תלויים במשותף].