מספרים מרוכבים

- מספר מהצורה $z=a+ib$ כאשר a ו-b הם מספרים ממשיים ו- $i=\sqrt{-1}$ נקרא מספר מרוכב.

אם $z=a+ib$ ו- $w=c+id$ הם מספרים מרוכבים אז נגדיר את פעולת החיבור והכפל כך:

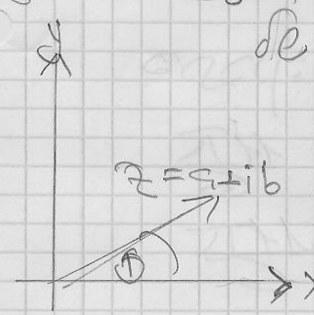
$$z+w=(a+ib)+(c+id)=a+c+i(b+d)$$

$$z\cdot w=(a+ib)(c+id)=ac-bd+i(ad+bc)$$

- אם $z=a+ib$ ו- $w=c+id$ הם שני מספרים מרוכבים אז $z=w$ אמ"מ $a=c$ ו- $b=d$.

- אם $z=a+ib$ אז נסמן $Re(z)=a$, החלק הממשי של z ו- $Im(z)=b$ החלק המדומה של z.

לכל מספר מרוכב $z=a+ib$ יש הצגה במישור כאשר החלק הממשי מתאים לציר ה-x והחלק המדומה מתאים לציר ה-y.
נגדיר את הערך המוחלט של המספר המרוכב z לפי המרחק של הנקודה (a,b) מראשית הצירים



$$|z|=|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$$

הערה: כמו במקרה של מספרים ממשיים מתקיים אי-שוויון המשולש

$$|z+w|\le|z|+|w|$$

נגדיר את הזווית של המספר המרוכב z: כזווית שיוצר הוקטור (a,b) עם החלק החיובי של ציר ה-x, $\theta = \arg z$ ונניח תמיד שמתקיים $0 \le \theta < 2\pi$.
מהגדרה אפשר לראות ש-

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

לכן מקבלים הצגה אחרת למספר z:

$$z = a+ib = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) =$$

$$= r\cos\theta + ir\sin\theta = r\,\mathrm{cis}\,\theta$$

להצגה זו קוראים ההצגה הקוטבית של z.

דוגמא: מצאו את ההצגה הקוטבית של

1. $z = \sqrt{3} - i$

פתרון: $|z| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$, נחשב $\arg z$:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\sin\theta = \frac{-1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

לכן $\arg z = \theta = \frac{11\pi}{6}$ ולכן

$$z = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

ב. $z=1+i$

פתרון: $|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$,

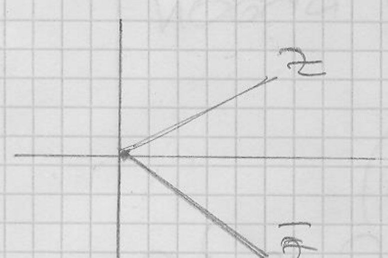
$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

ולכן $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

הגדרה: הצמוד $\bar{z}$ של מספר מרוכב $z=a+ib$ מוגדר כ- $\bar{z}=a-ib$

וקל לראות שמתקיים



$$|z|^2=z\bar{z}$$

- בעזרת הצמוד אפשר לחשב חילוק של מספרים מרוכבים

כי $\frac{z}{w}=\frac{z\bar{w}}{w\bar{w}}=\frac{z\bar{w}}{|w|^2}$

תרגיל: הביאו את המספרים $\frac{1+3i}{1-i}, \frac{2-i}{1-3i}$ לצורה $a+ib$.

$$\frac{1+3i}{1-i}=\frac{(1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-2+4i}{2}=-1+2i$$

$$\frac{2-i}{1-3i}=\frac{(2-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{5+5i}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

תכונות חשובות של הצמוד

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

דוגמא: הראו בעזרת תכונות הצמוד
שמתקיים $|zw| = |z||w|$

$$|zw|^2 = zw(\overline{zw}) = (zw)(\bar{z}\bar{w})$$

$$= (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2|w|^2$$

הכפלה לצורה קוטבית: אם z ו-w הם
מספרים מרוכבים בצורה קוטבית

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$w = R(\cos\beta + i\sin\beta)$$

אז המכפלה $z \cdot w$ נתונה לפי

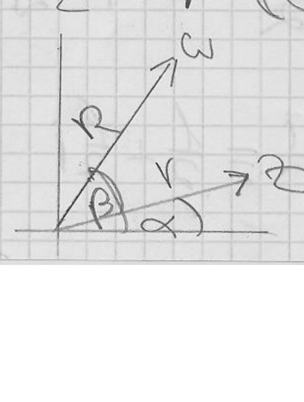
$$z \cdot w = Rr(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$$

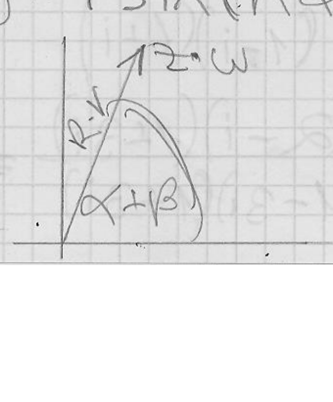
בפרט

$$z^2 = r^2(\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha))$$

ובאינדוקציה אפשר להוכיח

$$z^n = r^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$$





תרגיל: חשבו $(1-i)^7$:

נחשב קודם את ההצגה הקוטבית של $1-i$:

$|1-i|=\sqrt{2}$ ו-

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$$

$$\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\theta=\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$$

לכן $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

וכן

$$(1-i)^7=\sqrt{2}^7\left(\cos\left(\frac{49\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{49\pi}{4}\right)\right)$$

$$=\sqrt{2}^7\left(\cos\left(12\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(12\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=\sqrt{2}^7\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}^7\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=8(1+i)$$

תרגיל: חשבו $\left(\frac{\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)}{1-i}\right)^{40}$

פתרון: קודם נציג את המספר $\frac{\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)}{1-i}$ בצורה $a+ib$:

$$\frac{\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$$

כעת נחשב את ההצגה הקוטבית של $1+i\sqrt{3}$:

$$|1+i\sqrt{3}|=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$$

[illegible] $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{40} = 2^{40}\left(\cos\left(\frac{40\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{40\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2^{40}\left(\cos\left(12\pi + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(12\pi + \frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2^{40}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2^{40}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$