תרגול 4 – אינפי

משפט: יהיו $a_n \to a\, , b_n \to b$ אזי:

א. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

ב. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

ג. אם $b \neq 0$ אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

<u>תרגיל</u>

חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^7+5n^2+1}{6n^7+n^4}$.

<u>פתרון</u>

נחלק את המונה והמכנה ב- n^7 ונקבל: $\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n^5}+\frac{1}{n^7}}{6+\frac{1}{n^3}}$. פרט ל-3,6 כל הגורמים שואפים לאפס, ולכן הגבול הוא $\frac{1}{2}$.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

מהו הגבול של הסדרה $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1+(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}$?

<u>פתרון</u>

הסדרה $\frac{1}{n}$ מתכנסת לאפס נראה ש $\frac{1+(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}$ מתבדרת ולכן גם a_n. הסבר: אם a_n היתה מתכנסת אז גם $\frac{1+(-1)^n}{\sqrt[n]{2}} = a_n - \frac{1}{n}$ צריכה להתכנס לפי אריתמטיקה של גבולות אבל זה יסתור את כך שנראה ש $\frac{1+(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}$ מתבדרת. לכן, מ"ל ש $\frac{1+(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}$ מתבדרת.

נראה תחילה ש $\frac{1+(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}$ אינה מתכנסת לאפס. $\left|\frac{1+(-1)^n}{\sqrt[n]{2}} - 0\right| \underset{n\, is\, even}{=} \frac{2}{\sqrt[n]{2}} \geq \frac{2}{2} = 1$. אם נבחר $\varepsilon = 1$ (בשביל שלילת הגדרת הגבול) נקבל הדרוש. כעת נראה שהסדרה לא

מתכנסת גם לגבול $0 \neq L \in \mathbb{R}$. הפעם נשים לב ש $\left|\frac{1+(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}-L\right| \underset{n\,is\,odd}{=} |0-L| = |L| > 0$

ובחירה של $\varepsilon = |L|$ תספק הדרוש.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

מהו הגבול של הסדרה $a_n = \frac{1-\sqrt[2n]{3}}{1-\sqrt[n]{3}}$?

<u>פתרון</u>

נשים לב ש $1-\sqrt[n]{3} = 1-3^{\frac{1}{n}} = 1^2-\left(3^{\frac{1}{2n}}\right)^2 = \left(1-3^{\frac{1}{2n}}\right)\left(1+3^{\frac{1}{2n}}\right) = \left(1-\sqrt[2n]{3}\right)\left(1+\sqrt[2n]{3}\right)$. אם

נרחיב את השבר $\frac{1-\sqrt[2n]{3}}{1-\sqrt[n]{3}}$ ב"צמוד" של $1-\sqrt[2n]{3}$ שהוא $1+\sqrt[2n]{3}$ ונקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\sqrt[2n]{3}}{1-\sqrt[n]{3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\sqrt[2n]{3}\right)\left(1+\sqrt[2n]{3}\right)}{\left(1-\sqrt[n]{3}\right)\left(1+\sqrt[n]{3}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\sqrt[n]{3}}{\left(1-\sqrt[n]{3}\right)\left(1+\sqrt[n]{3}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\sqrt[n]{3}\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

מש"ל

<u>התכנסות במובן הרחב</u>

<u>הגדרה</u>

תהי $\{a_n\}$ סדרה. נאמר שהיא מתכנסת במובן הרחב לאינסוף אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $a_n > M$ (הגדרה אנלוגית ניתן לנסח גם עבור התכנסות למינוס אינסוף).

<u>תרגיל</u>

נניח ש- $a_n \to 0$ וכן שלסדרה b_n אין גבול (במובן הצר). מה ניתן להסיק על גבול הסדרה $c_n = a_n \cdot b_n$?

<u>פתרון</u>

שום דבר. נראה מספר דוגמאות:

א. $a_n = \frac{1}{n}, b_n = (-1)^n$ אזי $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$.

ב. $a_n=\frac{1}{n}, b_n=n$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1$.

ג. $a_n=\frac{1}{n}, b_n=(-1)^n n$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ ולכן הגבול אינו קיים.

ד. $a_n=\frac{(-1)^n}{n},\ b_n=n^2(-1)^n$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\infty$.

מש"ל

<u>טענה</u> [לוודא שראו בהרצאה או בתרגיל בית]

אם $a_n\to 0$ ו-b_n חסומה אזי $a_nb_n\to 0$.

<u>דוגמא</u>

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{\ln n}=0$ שכן $\frac{1}{\ln n}\to 0,\ |\sin n|\le 1$.

<u>תרגיל</u>

תהי $\{a_n\}\subseteq\mathbb{R}^+$ סדרה השואפת ל-L. הוכיחו שמתקיים $\sqrt{a_n}\to\sqrt{L}$.

<u>פתרון</u>

[הערה: בעיקרון, בהכרח מתקיים $L\ge 0$, וזה נובע מאי שוויוני גבולות שהם היו אמורים לראות בכיתה.]

נפצל לשני מקרים.

א. $L>0$. טיוטה: רוצים להוכיח שלכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $|\sqrt{a_n}-\sqrt{L}|<\varepsilon$.

$$|\sqrt{a_n}-\sqrt{L}|=\left|\frac{\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{L}\right)\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{L}\right)}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}\right|=\left|\frac{a_n-L}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}\right| \quad (*).$$

כעת, מכיוון ש-$a_n\to L$ ידוע לנו שלכל $\varepsilon'>0$ קיים $n_1\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_1$ מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon'$. נציב זאת ב-(*) ונקבל:

$|\sqrt{a_n}-\sqrt{L}|=\left|\frac{\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{L}\right)\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{L}\right)}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}\right|=\left|\frac{a_n-L}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}\right|<\frac{\varepsilon'}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}<\frac{\varepsilon'}{\sqrt{L}}$. אנחנו רוצים שהביטוי כולו יהיה קטן מ-ε. אבל זה מתקיים לכל ε' ולכן נבחר $\varepsilon'=\varepsilon\cdot\sqrt{L}$, ונקבל הדרוש.

ב. $L=0$. מתקיים: $a_n<\varepsilon^2\ \to\ |\sqrt{a_n}-0|=|\sqrt{a_n}|<\varepsilon$. ידוע שלכל ε' קיים $n_1\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_1$ מתקיים $|a_n|<\varepsilon'$. נבחר $\varepsilon'=\varepsilon^2$ ונקבל הדרוש.

מש"ל

משפט הסנדוויץ'

אם מתקיים $a_n \le b_n \le c_n$ וגם ידוע ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ אזי בהכרח $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

תרגיל

מצאו את הגבול של הסדרה $a_n = \left(2^n + 3^n\right)^{\frac{1}{n}}$.

פתרון

מתקיים $3^n \le 2^n + 3^n \le 3^n + 3^n = 2 \cdot 3^n$ ולכן $3 = \left(3^n\right)^{\frac{1}{n}} \le \left(2^n + 3^n\right)^{\frac{1}{n}} \le \left(2 \cdot 3^n\right)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}} \cdot 3$.

בשיעורי הבית תראו ש- $2^{\frac{1}{n}} \to 1$. יוצא ששני צידי אי השוויון שואפים ל-3, ולכן לפי משפט הסנדוויץ' הגבול הוא 3.

מש"ל

תרגיל

הוכיחו שאם $a_n \to a \ne 0$ ואם $\frac{b_n}{a_n} \to 1$ אזי $b_n \to a$. הוכיחו זאת גם במקרה ש- $a = 0$.

פתרון

נשים לב שאם $\frac{b_n}{a_n} \to 1$ אזי החל ממקום מסויים הביטוי $\frac{b_n}{a_n}$ מוגדר, מה שאומר שהחל ממקום מסויים $a_n \ne 0$. מתקיים: $b_n = a_n \frac{b_n}{a_n} \to a \cdot 1 = a$.

מש"ל

תרגיל

תהי $a_n \to 1$. הוכיחו או הפריכו: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$.

פתרון

תזכורת: אם $a_n \to 1$ אזי לכל סביבת ε של 1, U_ε, קיים מקום שהחל ממנו כל איברי הסדרה נמצאים ב- U_ε. בפרט, עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}$, נקבל שהחל ממקום מסויים כל איברי הסדרה גדולים מאפס. לכן לביטוי $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ יש משמעות.

הערה: אם $a_n \to L$ אזי $a_{n+1} \to L$. רעיון ההוכחה: אותו n_0 עושה את העבודה.

בחזרה לתרגיל: מאריתמטיקה של גבולות נסיק הדרוש.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

מצאו את הגבול $\frac{n^n}{n!}$.

<u>פתרון</u>

נוכיח באינדוקציה ש- $n+1 \le \frac{n^n}{n!}$ החל ממקום מסויים. כלומר ש - $(n+1)! \le n^n$. עבור $n=3$ הטענה נכונה. נניח נכונות ל- n ונוכיח עבור $n+1$. כלומר, יש להראות ש- $(n+2)! \le (n+1)^{n+1}$. אחרי פיתוח: $(n+1)!(n+2) \le (n+1)^n (n+1)$. לפי ה"א מתקיים $(n+1)!(n+2) \le (n+2)n^n$. לכן מספיק להוכיח: $(n+2)n^n \le (n+1)^n (n+1)$. אחרי חלוקה נקבל: $\frac{n+2}{n+1} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. אגף ימין שואף ל- e (מספר אוילר) ואגף שמאל שואף ל-1. לכן, מכיוון ש- $e>1$ החל ממקום מסויים מתקיים אי השווין הדרוש.

כעת, מכיוון ש- $n+1 \le \frac{n^n}{n!}$, לפי משפט סנדוויץ' המורחב מקבלים שהגבול הוא אינסוף.

מש"ל

<u>טענה</u>

אם $\lim a_n = \infty$ ואם $\{b_n\}$ סדרה חסומה מלרע, אזי $\lim(a_n+b_n)=\infty$.

<u>הוכחה</u>

יהי K חסם מלרע של הסדרה $\{b_n\}$ אזי $a_n+b_n \ge a_n+K$. לפי גרסת אינסוף של משפט הסנדוויץ' מספיק להראות ש- $a_n+K \to \infty$. יהי $M \in \mathbb{R}$. כל שעלינו הראות הוא ש- $a_n+K>M$ החל ממקום מסויים. כלומר שקיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $a_n > M-K$ לכל $n \ge n_0$. אך זה נובע מיידית מכך ש- $a_n \to \infty$.

מש"ל

משפט

תהי $\{a_n\}$ סדרת מספרים חיוביים. אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$ (גם במובן הרחב) אזי הסדרה $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ גם מתכנסת במובן הרחב ומתקיים $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

תרגיל

חשבו $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

פתרון

נתבונן בסדרה $a_n=n$. זוהי סדרת מספרים חיוביים. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=1$ ולכן $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

מש"ל

תרגיל

חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sqrt[n]{n!}$.

פתרון

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}n=\infty.$$

מש"ל