תרגול 1 – 88-112 אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשע"ו

22 באוקטובר 2015

פרטים טכניים

- דף הקורס נמצא באתר `www.math-wiki.com`.
- שאלות בנוגע לחומר הלימודי מומלץ לשאול בדף השיחה באתר של הקורס.
- ישנה חובת הגשת תרגילים. התרגילים יוגשו דרך מערכת ה-XI (קישור באתר הקורס). יעלה תרגיל כל שבוע, ותאריך ההגשה שלו יהיה לאחר שבועיים.
- הרכב הציון בקורס: 80% מבחן, 10% בוחן (באמצע הסמסטר) ו-10% שיעורי בית.
- ספרים מומלצים:
  - החוברת של פרופ' בועז צבאן (קישור באתר הקורס).
  - ספרי האוניברסיטה הפתוחה (אפשר להשיג בספרייה).
  - הספר של שאום (אפשר להשיג בספרייה).

1 מספרים מרוכבים

עד היום אנחנו רגילים לעבוד עם המספרים הממשיים: 3, 0, -4, $\frac{3}{7}$, π^2 וכד'. הבעיה היא שאנחנו לא יכולים לפתור כל משוואה עם מספרים ממשיים; למשל, למשוואה $x^2+1=0$ אין פתרון. אז מוסיפים יצור חדש, i, המקיים $i^2=-1$.
אבל אם כבר הוספנו את i, אנחנו יכולים להוסיף ולכפול אותו במספרים ממשיים, ולקבל יצורים כמו $1+i$, $-\frac{1}{2}+2i$, $\pi-i$ וכן הלאה.

הגדרה 1.1. i הוא "יצור" המקיים $i^2=-1$.
מספר מהצורה $z=a+bi$, כאשר a ו-b מספרים ממשיים, נקרא **מספר מרוכב**.
ההצגה $z=a+bi$ נקראת **ההצגה האלגברית / הקרטזית** של z.
a נקרא **החלק הממשי** של z, ומסומן $\mathrm{Re}\left(z\right)$.
b נקרא **החלק המדומה** של z, ומסומן $\mathrm{Im}\left(z\right)$.
אם $\mathrm{Im}\left(z\right)=0$, z נקרא **ממשי טהור**.
אם $\mathrm{Re}\left(z\right)=0$, z נקרא **מדומה טהור**.

הגדרה 1.2. נגדיר פעולות אלגבריות על מספרים מרוכבים:

1. חיבור וחיסור:
$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)\,i$$

2. כפל:
$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bd\underbrace{i^2}_{-1}=(ac-bd)+(ad+bc)\,i$$

(מה עם חילוק? בהמשך...)

הפעולות שהגדרנו מקיימות את כל החוקים המוכרים לנו, כמו חוק הקיבוץ, חוק החילוף, חוק הפילוג וכד'.

דוגמה 1.3.

$$\begin{aligned}(2+i)+(3-2i) &= 5-i\\ (2+i)\cdot(3-2i) &= 6-4i+3i-2i^2=6-i-2\cdot(-1)=8-i\end{aligned}$$

הגדרה 1.4. אם $z=a+bi$, **המספר הצמוד** של z הוא $\overline{z}=a-bi$.
למשל, המספר הצמוד של $8-2i$ הוא $8+2i$.

משפט 1.5 (תכונות המספר הצמוד)**.**

1. $\overline{\overline{z}}=z$.
2. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.
3. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.
4. $z+\overline{z}=2\cdot\mathrm{Re}\,(z)$.
5. $z-\overline{z}=2i\cdot\mathrm{Im}\,(z)$.
6. $z=\overline{z}$ אם ורק אם z ממשי.
7. אם α ממשי, $\overline{\alpha\cdot z}=\alpha\cdot\overline{z}$ (נובע משילוב סעיפים 3 ו-6).

הוכחה.

2. נסמן $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$. לכן
$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(a+bi)+(c+di)}=\overline{(a+c)+(b+d)\,i}=(a+c)-(b+d)\,i=(a-bi)+(c-di)=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

3. נסמן $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$. לכן
$$\begin{aligned}\overline{z_1\cdot z_2} &= \overline{(a+bi)\cdot(c+di)}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)\,i}=(ac-bd)-(ad+bc)\,i\\ \overline{z_1}\cdot\overline{z_2} &= \overline{a+bi}\cdot\overline{c+di}=(a-bi)\cdot(c-di)=ac-adi-bci-bd=(ac-bd)-(ad+bc)\,i\end{aligned}$$

4. נסמן $z=a+bi$. לכן,
$$z+\overline{z}=a+bi+\overline{a+bi}=a+bi+a-bi=2a=2\mathrm{Re}\,(z)$$

□

הגדרה 1.6. אם $z=a+bi$, **הערך המוחלט** של z הוא $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.
למשל, $|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.

משפט 1.7 (תכונות הערך המוחלט).

1. $|z|\geq 0$.
2. $|z|=0$ אם ורק אם $z=0$.
3. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.
4. אי-שוויון המשולש: $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$.
5. $|-z|=|z|=|\overline{z}|$.
6. $z\cdot\overline{z}=|z|^2$.
7. $|\text{Re}\,(z)|\leq|z|$, $|\text{Im}\,(z)|\leq|z|$.

הוכחה.
6. נסמן $z=a+bi$. לכן

$$z\cdot\overline{z}=(a+bi)\,(a-bi)=a^2-abi+abi+b^2=a^2+b^2=|z|^2$$

3. הפעם – בלי סימונים!

$$|z_1\cdot z_2|^2=z_1\cdot z_2\cdot\overline{z_1\cdot z_2}=z_1\cdot z_2\cdot\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=z_1\cdot\overline{z_1}\cdot z_2\cdot\overline{z_2}=|z_1|^2\cdot|z_2|^2$$

על ידי הוצאת שורש משני האגפים מקבלים את הדרוש.
7. נוכיח למשל $|\text{Re}\,(z)|\leq|z|$. נסמן $z=a+bi$. לכן,

$$|\text{Re}\,(z)|=|a|=\sqrt{a^2}\leq\sqrt{a^2+b^2}=|z|$$

□

תרגיל 1.8. עבור $z=(5+2i)\cdot(2-3i)$, מצאו את ההצגה הקרטזית של z. לאחר מכן, חשבו את $\text{Re}\,(z)$, את $\text{Im}\,(z)$, את $\overline{z}$ ואת $|z|$.

פתרון. ההצגה האלגברית היא

$$z=(5+2i)\cdot(2-3i)=10-15i+4i-6i^2=10-11i+6=16-11i$$

כעת, לחישובים האחרים:

$$\text{Re}\,(z)=16,\quad \text{Im}\,(z)=-11,\quad \overline{z}=16+11i,\quad |z|=\sqrt{16^2+(-11)^2}=\sqrt{256+121}=\sqrt{377}$$

הערה 1.9. כעת נלמד כיצד מתבצע חילוק מספרים מרוכבים. נניח שרוצים לחשב את $\frac{z_1}{z_2}$. הרעיון הוא לכפול את המונה ואת המכנה של השבר באותו גורם, כך שהמכנה יהפוך להיות ממשי טהור. אז נוכל להגיע להצגה אלגברית כמו שאנחנו רוצים. הטריק הזה מתבצע בעזרת המספר הצמוד:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

תרגיל 1.10. עבור $z=\frac{5+2i}{2-3i}$, מצאו את ההצגה הקרטזית של z. לאחר מכן, חשבו את $\mathrm{Re}\left(z\right)$, את $\mathrm{Im}\left(z\right)$, את $\overline{z}$ ואת $|z|$.

פתרון. ההצגה האלגברית היא

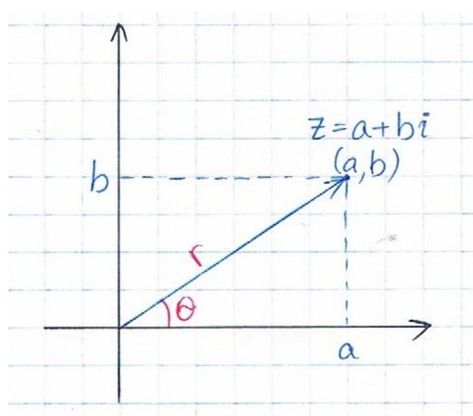
$$z=\frac{5+2i}{2-3i}=\frac{(5+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{10+15i+4i-6}{4+6i-6i+9}=\frac{4+19i}{13}=\frac{4}{13}+\frac{19}{13}i$$

כעת, לחישובים האחרים:

$$\mathrm{Re}\left(z\right)=\frac{4}{13},\quad \mathrm{Im}\left(z\right)=\frac{19}{13},\quad \overline{z}=\frac{4}{13}-\frac{19}{13}i,\quad |z|=\sqrt{\left(\frac{4}{13}\right)^2+\left(\frac{19}{13}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{169}+\frac{361}{169}}=\sqrt{\frac{29}{13}}$$

ההצגה הקוטבית / פולרית של מספר מרוכב

הרעיון: כל מספר מרוכב שאינו 0 אפשר לאפיין באמצעות רדיוס וזווית. על המספר $z=a+bi$ חושבים כמו על הנקודה (a,b) במישור, והמספר המרוכב z הוא ה"וקטור" מראשית הצירים לנקודה הזו.
הרדיוס של z, r, הוא האורך של הקו, כלומר $r=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$. הזווית של z עם הכיוון החיובי של ציר x, θ, מקיימת $\tan\theta=\frac{b}{a}$.



איור 1: המחשה של המישור המרוכב

אנחנו רואים שמתקיים $a=r\cos\theta$ ו-$b=r\sin\theta$. לכן,

$$z=a+bi=r\cos\theta+r\sin\theta\cdot i=r\underbrace{(\cos\theta+i\sin\theta)}_{\mathrm{cis}\theta}=r\mathrm{cis}\theta$$

זו **ההצגה הקוטבית / פולרית** של z.
נעיר שלכל מספר מרוכב שונה מאפס יש הצגה פולרית יחידה; לאפס אין הצגה פולרית, כי הזווית θ אינה מוגדרת עבורו.

הערה 1.11.

1. כאשר מחפשים את הזווית, חשוב לשים לב באיזה רביע נמצא z, כי יהיו שתי אפשרויות.
2. אם z הוא מדומה טהור, כלומר $z = bi$, אזי הזווית היא $\frac{\pi}{2}$ (90°) אם $b > 0$ ו-$\frac{3\pi}{2}$ (270°) אם $b < 0$.
3. את התשובה הסופית מחזירים ברדיאנים ולא במעלות. כדי לעבור לרדיאנים כופלים ב-$\frac{\pi}{180}$.

דוגמה 1.12.

1. נמצא את ההצגה הפולרית של $z = -1 - i$. לפי הנוסחאות שהיו לנו:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \tan\theta &= \frac{-1}{-1} = 1 \end{aligned}$$

לכן $\theta = 45^\circ$ או $\theta = 225^\circ$. מהסתכלות במערכת צירים, רואים ש-z ברביע השלישי, ולכן $\theta = 225^\circ = \frac{5\pi}{4}$. כלומר,

$$z = -1 - i = \sqrt{2}\text{cis}\frac{5\pi}{4}$$

2. נמצא את ההצגה הפולרית של $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. לפי הנוסחאות,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1 \\ \tan\theta &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

לכן $\theta = 120^\circ$ או $\theta = 300^\circ$. במערכת הצירים, z ברביע השני, ולכן $\theta = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$. כלומר,

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \text{cis}\frac{2\pi}{3}$$

3. נמצא את ההצגה האלגברית של $z = 2\text{cis}\frac{\pi}{3}$. נזכור כי $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$, ולכן ההצגה האלגברית היא

$$z = 2\text{cis}\frac{\pi}{3} = 2\left(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ\right) = 2\cos 60^\circ + 2i\sin 60^\circ = 1 + \sqrt{3}i$$

מה היתרונות של ההצגה הפולרית? מסתבר שיותר קל לכפול ולחלק מספרים בהצגה הפולרית שלהם:

משפט 1.13. נניח $z_1 = r_1\text{cis}\theta_1$ ו-$z_2 = r_2\text{cis}\theta_2$. אזי

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (r_1\text{cis}\theta_1)\cdot(r_2\text{cis}\theta_2) = r_1 r_2 \text{cis}\left(\theta_1+\theta_2\right) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1\text{cis}\theta_1}{r_2\text{cis}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\text{cis}\left(\theta_1-\theta_2\right) \end{aligned}$$

דוגמה 1.14.

$$3\text{cis}60^\circ \cdot 2\text{cis}30^\circ = 6\text{cis}\left(60^\circ+30^\circ\right) = 6\text{cis}90^\circ = 6\left(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ\right) = 6i$$

מסקנה 1.15 (נוסחת דה-מואבר *De Moivre*)**.** אם $z = r\text{cis}\theta$, אזי $z^n = r^n\text{cis}\left(n\theta\right)$.

תרגיל 1.16. חשבו את $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{5775}$.

פתרון. קודם כל, עוברים לצורה הפולרית. קודם כבר הייתה לנו את הצורה הפולרית, שהיא $2\text{cis}\frac{\pi}{3}$. כעת, נשתמש במסקנה ממשפט דה-מואבר:

$$\begin{aligned} \left(1+\sqrt{3}i\right)^{5775} &= \left(2\text{cis}\frac{\pi}{3}\right)^{5775} = 2^{5775}\text{cis}\frac{5775\pi}{3} = 2^{5775}\text{cis}\left(1925\pi\right) = \\ &= 2^{5775}\left(\cos\left(1925\pi\right) + i\sin\left(1925\pi\right)\right) = 2^{5775}\left(-1+i\cdot 0\right) = -2^{5775} \end{aligned}$$

התשובה הסופית: $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{5775} = -2^{5775}$.