רמזים לפתרון תרגיל בית מספר 1

1. הוכיחו את התכונות הבאות של המספרים המרוכבים z, z_1, z_2 :

א. $\mathrm{Re}(z_1+z_2)=\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)$, וכנ"ל עבור Im .

נסמן $z_1=a_1+b_1i$ ו - $z_2=a_2+b_2i$ .....

ב. זהות המקבילית: $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$. מהי המשמעות הגיאומטרית?

רמז: פותחים את אגף שמאל (למשל) ומגיעים לאגף הימני.

2. פתרו את המשוואה: $z^4+2+2\sqrt{3}\cdot i=0$

התשובה הסופית: ארבעת השורשים הם: $\sqrt{2}e^{\frac{-\pi i}{6}}, \sqrt{2}e^{\frac{-2\pi i}{3}}, \sqrt{2}e^{\frac{5\pi i}{6}}, \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{3}}$.

3. חשבו את הביטוי: $\dfrac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n}$

התשובה הסופית היא:

$$\frac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n}=2i^{n+1}=\begin{cases}2i & n=4k\\ -2 & n=4k+1\\ -2i & n=4k+2\\ 2 & n=4k+3\end{cases}$$

4. מצאו $z=n+mi$, n,m שלמים כך שמתקיים: $z^3=2+11i$ (רמז: היעזרו בנתון ש- n,m שלמים)

רמז: יהי $z=n+mi$, כאשר $n,m\in\mathbb{Z}$. נעלה אותו בחזקה שלישית ונשווה עם הנתון:

$(n+mi)^3=n^3-3nm^2+i\left(3n^2m-m^3\right)=2+11i$. מהשוואת החלקים הממשי והמדומה מקבלים מערכת משוואות...

5. יהא $n\geq 2$ טבעי, ויהא P אוסף שורשי היחידה מסדר n.

א. הוכיחו שקיים $z\in P$ (כלומר קיים שורש יחידה) כך ש- $P=\{1,z,z^2,\dots,z^{n-1}\}$

ב. הראו שסכום איברי P הוא אפס. (רמז: סדרה הנדסית)

[תזכורת: $z\in\mathbb{C}$ הוא שורש יחידה מסדר n אם $z^n=1$]

א. נפתור את המשוואה $z^n=1$. מתקיים $(cis(\theta))^n=cis(n\theta)=1$ ז"א $n\theta=2\pi k$ עבור $0\leq k<n$ ולכן הפתרונות הם ...

ב. שימו לב: $z_1\neq 1$ ולכן קיבלנו סידרה הנדסית $1\neq q=z_1$. נשתמש בנוסחה עבור סידרה הנדסית ונקבל...

6. תהא נתונה המשוואה $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0=0$ וידוע כי a_i ממשיים לכל $0\leq i\leq n$.

הוכיחו שאם z הוא פתרון של המשוואה, אזי גם $\bar{z}$ (הצמוד המרוכב) הוא פתרון שלה.

נתונה המשוואה $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0=0$. נתון גם כי z הוא פתרון של המשוואה ולכן מתקיים $a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_0=0$. נפעיל הצמדה על שני האגפים ונקבל ...

7. הוכיחו את הזהות: $\sin(3\theta)=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$ (בשימוש משפט דה-מואבר).

מחד, מתקיים:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3\cos^2\theta\cdot i\sin\theta+3\cos\theta(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3$$
$$=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i\left(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta\right)$$

מאידך, עפ"י משפט דה – מואבר מתקיים:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)$$

נשווה חלקים מדומים....