תרגיל 7 – מתמטיקה לכימאים ג'

1. מצאו את סכום הטורים הבאים ואת תחום התכנסותם:

1.1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

פתרון: נשים לב,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt\underset{\substack{for\_all\\ x\in(-R,R)}}{=}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt .$$

נחשב,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n\underset{\substack{for\\ -1<-t^2<1\Leftrightarrow\\ 1>\underbrace{t^2>-1}_{always\_true}\Leftrightarrow\\ t^2<1\Leftrightarrow\\ -1<t<1}}{=}\frac{1}{1-(-t^2)}=\frac{1}{1+t^2}$$

לכן, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}=\frac{1}{1+t^2}$ מתכנס עם רדיוס התכנסות $R=1$.

לפי משפט אינטגרציה איבר איבר, לכל $x\in(-1,1)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\left[\arctan t\right]_0^x=$$
$$\arctan x-\arctan 0=\arctan x$$

נבדוק את התכנסות הטור בקצוות:

עבור $x=1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 1^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

עבור $x=-1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(-1)^n}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

בסה"כ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\arctan x$$

תחום ההתכנסות: $-1\le x\le 1$.

1.2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+2}$

פתרון: נשים לב,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{2n+1}dt\underset{\substack{for\_all\\ x\in(-R,R)}}{=}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n+1}dt .$$

נחשב,

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n+1} = t\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} = t\sum_{n=0}^{\infty} (t^2)^n \underset{\substack{for \\ \underbrace{-1<t^2}_{always\_true} <1 \Leftrightarrow \\ t^2<1 \Leftrightarrow \\ -1<t<1}}{=} t\cdot\frac{1}{1-t^2} = \frac{t}{1-t^2}$$

לכן, $\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n+1} = \frac{t}{1-t^2}$ מתכנס עם רדיוס התכנסות $R=1$.

לפי משפט אינטגרציה איבר איבר, לכל $x\in(-1,1)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{2n+1}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n+1}dt = \int_0^x \frac{t}{1-t^2}dt \underset{partial\_fractions}{=} \int_0^x \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\ln|1-t|-\ln|1+t|\right]_0^x = \frac{1}{2}(-\ln|1-x|-\ln|1+x|) \underset{-1<x<1}{=} \frac{1}{2}(-\ln(1-x)-\ln(1+x))$$

$$-\frac{1}{2}(\ln(1-x)+\ln(1+x)) = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

נבדוק את התכנסות הטור בקצוות:

עבור $x=1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+2}$ מתבדר ($\frac{1}{2n+2}\sim\frac{1}{n}$)

עבור $x=-1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+2}$ מתבדר.

בסה"כ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+2} = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

תחום ההתכנסות: $-1<x<1$.

1.3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}$

פתרון: נשים לב,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \frac{t^n}{5^{n+1}}dt \underset{\substack{for\_all \\ x\in(-R,R)}}{=} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{5^{n+1}}dt.$$

נחשב,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{5^n} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{5}\right)^n \underset{\substack{for \\ -1<\frac{t}{5}<1\Leftrightarrow \\ -5<t<5}}{=} \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{5}} = \frac{1}{5-t}$$

לכן, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5-t}$ מתכנס עם רדיוס התכנסות $R=5$.

לפי משפט אינטגרציה איבר איבר, לכל $x\in(-5,5)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{t^n}{5^{n+1}}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{5^{n+1}}dt=\int_0^x\frac{1}{5-t}dt=\left[-\ln|5-t|\right]_0^x=$$

$$-\ln|5-x|+\ln 5\underset{-5<x<5}{=}-\ln(5-x)+\ln 5=\ln\frac{5}{5-x}$$

נבדוק את התכנסות הטור בקצוות:

עבור $x=5$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}$ מתבדר ($\frac{1}{n+1}\sim\frac{1}{n}$)

עבור $x=-5$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5)^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)}$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

בסה"כ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}=\ln\frac{5}{5-x}$$

תחום ההתכנסות: $-5\le x<5$.

1.4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(3x)^{n+1}}{n!}$

פתרון: נשים לב,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(3x)^{n+1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)3^{n+1}x^{n+1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}(x^{n+2})'}{n!}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}x^{n+2}}{n!}\right)'.$$

נחשב,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}x^{n+2}}{n!}=3x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}=3x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}\underset{\substack{for\_all\_3x\Leftrightarrow\\ for\_all\_x}}{=}3x^2e^{3x}$$

לכן, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}x^{n+2}}{n!}=3x^2e^{3x}$ מתכנס עם רדיוס התכנסות $R=\infty$.

לפי משפט גזירה איבר איבר, לכל x ,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(3x)^{n+1}}{n!}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}x^{n+2}}{n!}\right)'=\left(3x^2e^{3x}\right)'=6xe^{3x}+9x^2e^{3x}$$

תחום ההתכנסות: לכל x .

1.5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^{n+1}}{n!(n+1)}$

פתרון: נשים לב,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^{n+1}}{(n+1)n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\int_0^x t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{3^n t^n}{n!}dt\underset{\substack{for\_all\\ x\in(-R,R)}}{=}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n t^n}{n!}dt.$$

נחשב,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3t)^n}{n!}\underset{\substack{for\_all\_3t\Leftrightarrow\\ for\_all\_t}}{=}e^{3t}$$

לכן, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n t^n}{n!}=e^{3t}$ מתכנס עם רדיוס התכנסות $R=\infty$.

לפי משפט אינטגרציה איבר איבר לכל x ,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^{n+1}}{(n+1)n!}=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n t^n}{n!}dt=\int_0^x e^{3t}dt=\left[\frac{e^{3t}}{3}\right]_0^x=\frac{e^{3x}}{3}-\frac{1}{3}$$

תחום ההתכנסות: לכל x .

2. פתחו את הפונקציות הבאות לטורי טיילור סביב הנקודות הנתונות:

2.1 $f(x)=x\sin(x^2)$ סביב $x=0$.

פתרון: ידוע כי לכל x , $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. לכן, לכל x ,

$$f(x)=x\sin(x^2)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n+1)!}$$

בפרט, בסביבת $x=0$ הפונקציה הנתונה שווה ל $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n+1)!}$.

לכן $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n+1)!}$ הוא טור מקלורן של הפונקציה.

2.2 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ סביב $x=0$.

פתרון: ידוע כי $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ לכל $-1<x<1$. לכן,

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}=x\cdot\frac{1}{1+x^2}=x\cdot\frac{1}{1-(-x^2)}\underset{\substack{for\_all\_x\_such\_that\\ -1<-x^2<1\Leftrightarrow\\ 1>x^2>-1\Leftrightarrow\\ 1>x^2\Leftrightarrow\\ -1<x<1}}{=}x\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}$$

כלומר, בסביבת $x=0$ הפונקציה הנתונה שווה ל $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}$.

לכן $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}$ הוא טור מקלורן של הפונקציה.

2.3 $f(x)=e^x$ סביב $x=-3$.

פתרון: ידוע כי לכל x , $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. לכן, לכל x ,

$$f(x)=e^x = e^{x+3-3} = e^{x+3}e^{-3} = e^{-3}e^{x+3} = e^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-3}(x-3)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{e^3 n!}$$

ו $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{e^3 n!}$ הוא טור טיילור המבוקש.

2.4 $f(x)=\sin x$ סביב $x=2\pi$.

פתרון: ידוע כי לכל x , $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. לכן, לכל x ,

$$f(x)=\sin x = \sin((x-2\pi)+2\pi) \underset{\sin\_is\_a\_periodic\_function\_with\_period\_2\pi}{=}$$

$$= \sin(x-2\pi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (x-2\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ו $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (x-2\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ הוא טור טיילור המבוקש.

2.5 $f(x)=\frac{1}{x}$ סביב $x=4$.

פתרון: ידוע כי $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ לכל $-1<x<1$. לכן,

$$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{x-4+4}=\frac{1}{4+(x-4)}=\frac{1}{4-(-(x-4))}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{(x-4)}{4}\right)} \underset{\substack{for\_all\_x\_such\_that \\ -1<-\frac{(x-4)}{4}<1\Leftrightarrow \\ 4>x-4>-4\Leftrightarrow \\ 8>x>0}}{=}$$

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{(x-4)}{4}\right)^n = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (x-4)^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (x-4)^n}{4^{n+1}} =$$

כלומר, בסביבת $x=4$ הפונקציה הנתונה שווה ל $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (x-4)^n}{4^{n+1}}$ לכן

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (x-4)^n}{4^{n+1}}$ הוא טור טיילור המבוקש.

בהצלחה! ☺