אבנר סופר

אוניברסיטת תל אביב

מבוא לפיזיקה מודרנית

תורת היחסות הפרטית

יסודות תורת היחסות

עקרון היחסות של איינשטיין

חזרה קצרה: **עקרון היחסות של גלילי:** חוקי המכניקה אינווריאנטים תחת טרנספורמצית גלילי.

ראינו שאחת המסקנות המתבקשות מעקרון זה (בצירוף משוואות מקסוול) – קיומה של מערכת מועדפת אשר רק בה אור נע במהירות c – איננה מאומתת ע"י נסויים שמדויקים מספיק לזהותה (החל מניסוי מייקלסון מורלי).

ראינו גם שפתרונות אחדים שהוצעו לפתרון הבעייה לא עמדו אף הם במבחן הנסיון.

המסקנה מכך היא שדרוש פתרון אחר – במקרה זה, פתרון יותר דרסטי מבחינת הזעזוע שהוא מעורר לתפישת המרחב-זמן שלנו, תפישה שנבנתה ע"י ניסויים (בעצם נסיון חיים יום-יומי) שנערכים במהירויות נמוכות בהרבה מ-c.

דוגמא: ילדים לומדים מהר שכל דבר נופל למטה, ותופסים את הכוון למטה באופן מוחלט. אח"כ הם לומדים שכדוה"א עגול, ואז מתברר להם פרדוקס: איך עומדים על הראש באוסטרליה. פתרון הפרדוקס הזה הוא בהבנה שזה לא נכון שכל דבר נופל כלפי "למטה" מוחלט, אלא שכל דבר נמשך לכדוה"א.

הכלל "כל דבר נופל למטה" הוא **קירוב** למקרה שאנו מספיק לכדוה"א כדי לא להבחין בעקמומיותו.

איינשטיין ידע על תוצאות ניסוי מייקלסון-מורלי, אך לדבריו מה שהביא אותו לניסוח תורת היחסות היה חוסר סיפוק (החל מגיל 16) מכך שמשוואות מקסוול נראות כאילו אינן נכונות אלא במערכת מועדפת אחת, בשעה שהוא גרס שבהיותן חוקים פיזיקלים, עליהן להיות נכונות בכל מערכת אינרציאלית. ואכן, זוהי הצורה בה הוא גזר את תורת היחסות.

אי-הנכונות לכאורה של משוואות מקסוול נובעת מכך שהפרמטר $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, שמופיע בהן, מקבל את ערכו הקבוע רק במערכת המועדפת. לכן המשוואות אינן נכונות בכל מערכת אחרת.

כהרחבה לעקרון היחסות של גליליי (חוקי המכניקה נכונים בכל המערכות האינרציאליות), איינשטיין ניסח את עקרון היחסות הקרוי על שמו:

חוקי הפיזיקה נכונים בכל המערכות האינרציאליות

(מילותיו המדויקות של איינשטיין היו שונות. ניסוח זה מודרני יותר.)

"חוקי הפיזיקה" פרושו גם חוקי המכניקה וגם התורה האלקטרומגנטית. (היום אנו מחילים זאת על אינטראקציות נוספות, כגון הכוחות הגרעיניים, תורת המיתרים, וכו')

כפועל יוצא מכך, מהירות האור, שהיא פרמטר של משוואות מקסוול – חלק מחוקי הפיזיקה – היא בעלת אותו ערך בכל המערכות האינרציאליות.

כדי להבטיח שתנאי זה מתקיים גם אם יתברר בעתיד שמשוואות מקסוול אינן נכונות (יותר נכון, אם יתברר שהן קרוב של משוואות מדויקות יותר), נעשה כאיינשטיין וננסח תנאי זה כעקרון נפרד:

למהירות האור אותו הערך בכל המערכות האינרציאליות

לעקרון זה נקרא **עקרון קביעות מהירות האור** (The principle of the constancy of the speed of light) או בקיצור "**העקרון השני**".

שימו לב: העקרון השני מסביר את ניסוי מייקלסון-מורלי: הניסוי נמצא במערכת אינרציאלית ולכן מהירות האור בו קבועה בכל הכוונים. אין משמעות ל"מערכת האתר"

התוצאה הברורה הראשונה של העקרון השני היא שכלל חיבור המהירויות לפי טרנספורמצית גליליי אינו מתקיים, לפחות עבור מהירות האור:

לפי חיבור המהירויות של גליליי זה, אם הארי פוטר, שעף במהירות $V=30$ m/s יורה קרן לייזר בכוון תנועתו לעבר שער הקווידיץ' של מאלפוי, ישנן שתי אפשרויות:

1. אם אור הוא חלקיקי (כפי שגרס ניוטון) או התורה הבליסטית נכונה, אז מהירות קרן הלייזר ביחס להארי היא c, ואז מהירותה ביחס לשער היא $c + V$.
2. אם אור הוא גל (כפי שהתברר מניסויי יאנג וכו') שנישא באתר, אז מהירות קרן הלייזר ביחס למערכת האתר היא c, ואז (אם נניח שהשער במנוחה במערכת האתר) מהירותה ביחס להארי היא $c – V$.

אבל העקרון השני של איינשטיין אומר שמהירות הקרן היא c גם ביחס לפוטר וגם ביחס לשוער מאלפוי, למרות שהם אינם במנוחה באותה המערכת!

זה נראה מוזר כי זה נוגד את האינטואיציה שלנו, המבוססת על טרנספורמציית גליליי.

אבל בהמשך נראה כיצד להבין תופעה זו.

כעת נבנה את ההשלכות של תורת היחסות בהסתמך **אך ורק** (או כמעט אך ורק) על שני עקרונות אלה, ללא הנחות מוקדמות או דעות קדומות.

שיטה זו חיונית, משום שברור כי אנו עוסקים בתחום בו התנסויות קדומות מחיי היום-יום אינן רלוונטיות ולכן עלולות להטעות אותנו.

אבדן הסימולטניות

במכניקה ניוטונית, הזמן הוא מוחלט $(t'=t)$ וזהה לכל הצופים, ושני אירועים המתרחשים בו-זמנית עבור צופה אחד גם מדווחים להיות בו-זמניים ע"י כל צופה אחר.

נראה שהעקרון השני של איינשטיין מקלקל תנאי זה:

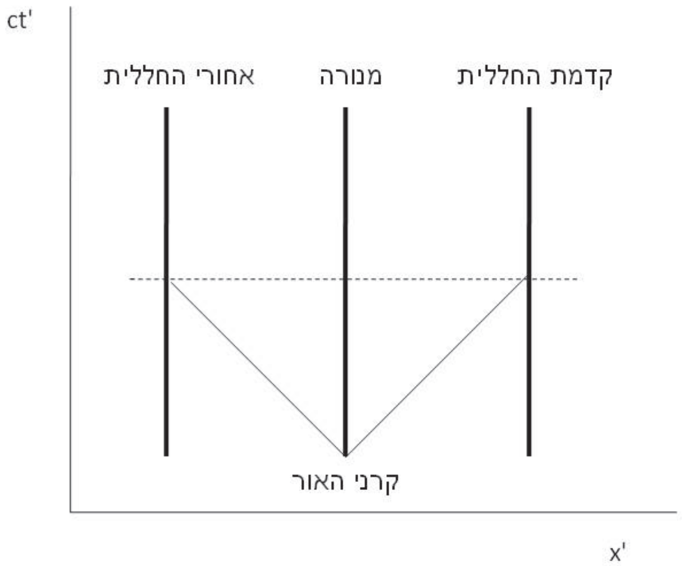
חללית נעה במהירות קבועה $V=c/4$ ביחס למעבדה על כדוה"א. במרכז החללית מנורה פולטת הבזק של אור.

נראה מהו הזמן בו מגיע האור אל קצות החללית לפי עקרון קביעות מהירות האור.

במערכת החללית: מאחר שהאור נע במהירות שווה ביחס לשני קצות החללית, הוא יגיע אל שניהם לאחר זמן שווה. נראה זאת באמצעות דיאגרמת המרחב-זמן במערכת החללית.

במקום לצייר את הזמן t על הציר האנכי, נצייר את הזמן כפול מהירות האור, ct.

עם צירים אלה, לקרני אור קווי עולם של 45 מעלות, שזה נוח:



ניתן לראות ששתי הקרניים הגיעו באותו הזמן לקצות החללית.

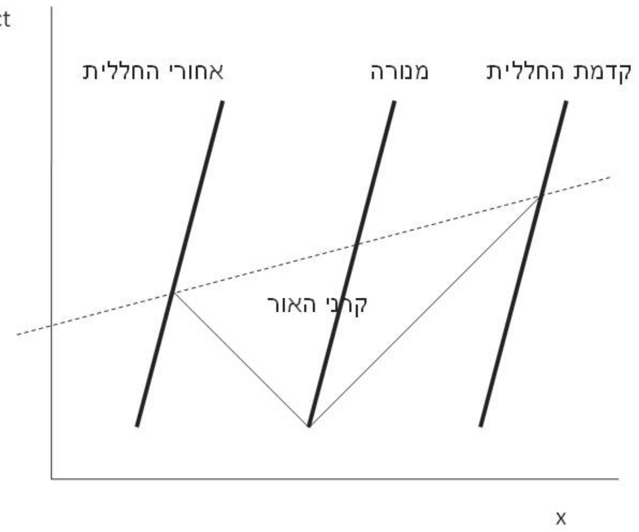
שימו לב: הקו השבור האופקי מחבר את כל האירועים הסימולטניים.

כעת נתבונן במהלך הדברים **במערכת המעבדה**:

גם במערכת זו, לפי העקרון השני של איינשטיין, קרני האור נעות במהירות c.

בנוסף, הצד הקדמי של החללית "בורח" מקרן האור, ואילו הצד האחורי מתקדם לעברה.

לכן האור פוגע באחורי החללית מוקדם יותר, ובקדמת החללית מאוחר יותר.



אם כך, במערכת המעבדה, שני האירועים (פגיעת האור בקצות החללית) אינם סימולטניים!

שימו לב: הקו השבור בציור האחרון הוא הקו של אירועים סימולטניים במערכת החללית, והיא בעל שיפוע שונה מ-0, כלומר האירועים לאורכו אינם סימולטנים בכדוה"א.

אז מתקבלת תוצאה חשובה של העקרון קביעות מהירות האור:

סימולטאניות אינה נשמרת במעבר בין מערכות אינרציאליות

תמיהה: איך יתכן ששני אירועים סימולטניים במערכת אחת אינם סימולטניים במערכת אחרת?

תשובה:

1. תופעה זו מתקבלת מתוך העקרון השני של איינשטיין, שקונסיסטנטי עם ניסוי מייקלסון-מורלי. עדיין עלינו לבדוק אם הוא קונסיסטנטי עם שאר הניסויים.
2. נראה אח"כ ששימור הסימולטניות היא תופעה נכונה בקירוב מסוים. התאמתה לניסיון החיים היום-יומי גורם לנו לחשוב שהיא עקרון יסודי, אך זה אינו נכון.
   השוו למקרה של העקרון היסודי "כל דבר נופל למטה", שאינו יסודי כלל.

שימו לב: שני הצופים מסכימים שהארועים 0פגיעת הקרן בקצות החללית) קרו. הם רק לא מסכימים לגבי <u>הזמנים</u> בהם הארועים קרו.

<u>מדידת זמן וסימולטניות</u>

למושג הסימולטניות השפעה חשובה בכל מדידת זמן:

שימו לב כיצד מודדים את זמן ההתרחשות של ארוע מסוים:

כדי למדוד את זמן הארוע, נשים לב מהי השעה שהראה שעון מסוים **באותו זמן בו ארע הארוע**.

לכן, **מדידת זמן היא למעשה זיהוי סימולטני של ארועים**: הארוע הפיזיקלי ומצב מחוגי (או תצוגת) השעון.

במילותיו של איינשטיין:

- If we wish to describe the *motion* of a material point, we give the values of its co-ordinates as functions of the time.
- Now we must bear carefully in mind that a mathematical description of this kind has no physical meaning unless we are quite clear as to what we understand by “time".
- We have to take into account that all our judgments in which time plays a part are always judgments of *simultaneous events*.
- If, for instance, I say, “That train arrives here at 7 o'clock," I mean something like this: “The pointing of the small hand of my watch to 7 and the arrival of the train are simultaneous events."

גם מדידת מרחק קשורה בסימולטניות: כשאני אומר שאורכו של עכבר הוא 10 ס"מ אני בעצם אומר שאפו של העכבר היה ליד קו ה-0 של הסרגל <u>בדיוק באותו הרגע</u> בו קצה זנבו נגע בקו ה-10 ס"מ.

<u>סינכרון שעונים</u>

בתחילת הקורס תארנו כיצד עלינו לבנות מערכת ייחוס:

היה עלינו להציב שעונים מסונכרנים – שכולם מראים את אותו הזמן בכל זמן נתון – ברחבי המערכת.

עשינו זאת ע"י סינכרון השעונים בראשית, והעברתם למקומותיהם.

הנחנו שהעברת השעונים אינה פוגמת בסינכרון.

הנחה זו **אינה מבוססת על העקרונות של איינשטיין**, ולכן לא נשתמש בה.

מאוחר יותר אף נראה, שבתורת היחסות הנחה זו אינה מתקיימת.

מאחר שרעינו שסימולטניות אינה נשמרת, יש לקבוע שיטה ברורה לסנכרון שעונים.

איינשטיין הציע שיטה כזו, שמשתמשת אך ורק בעקרונות של תורת היחסות:

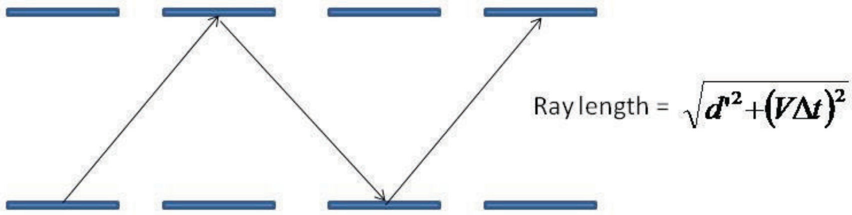
כדי לבדוק אם שני שעונים – **הנמצאים במנוחה זה ביחס לזה** – מסונכרנים, מניחים במרחק שווה ביניהם מקור אור הנמצא אף הוא במנוחה עם השעונים, והמקור נותן הבזק של אור.
אם השעונים קוראים את אותה השעה כאשר הבזק האור מגיע אליהם, אז הם מסונכרנים.
(אם נמצא שאינם מסונכרנים, נכוון אותם מעט ונבצע את בדיקת הסינכרון שוב, וכו').

<u>מדידת זמן</u>

מה עושה שעון? איך נדע להחיל את עקרונות איינשטיין על פעולת השעון?
נשתמש בשעון שעובד על אור. אז נוכל להחיל עליו את עקרון קביעות מהירות האור.

נתבונן בחללית הנעה במהירות V בכוון x ביחס לכדוה"א.
בחללית שתי מראות מקבילות, שביניהן עובר הבזק קצר של אור הלוך וחזור בכוון $\pm y$ פעמים רבות.
ניקח את המרחק בין שתי המראות להיות $d' = c/1\text{ns}$, כך שהאור פוגע באחת המראות כל זמן $\Delta t' = d'/c = 1 \text{ ns}$.
שימו לב שהתקן זה מהווה למעשה שעון: מרווח זמן של 2ns מתקבל ע"י ספירה של מספר הפעמים שהאור פגע במראה העליונה.

כעת נרצה למדוד את הזמן בין שתי פעימות של השעון הזה, כפי שהוא נראה ע"י צופה הנמצא על כדוה"א.
שימו לב שעבור צופה זה, קרן האור עוברת דרך ארוכה יותר מ-d' בין שתי המראות:



צופה זה רואה את הקרן עוברת דרך $d=\sqrt{d'^2+(V\Delta t)^2}$ בין שתי פגיעות מראה, כאשר Δt הוא הזמן שהצופה על כדוה"א מודד בין שתי פגיעות מראה.

לפי העקרון של איינשטיין, מהירות האור עבור צופה זה גם היא c, ולכן מרווח הזמן Δt הוא

$$\Delta t=\frac{d}{c}=\frac{\sqrt{d'^2+(V\Delta t)^2}}{c}.$$

נפתור עבור Δt:

$$\Delta t^2=\frac{d'^2+(V\Delta t)^2}{c^2}$$

$$\Delta t^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)=\frac{d'^2}{c^2}$$

$$\Delta t=\frac{d'/c}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

אם כך:

מרווחי זמן אינם אינווריאנטי תחת מעבר בין מערכות ייחוס

וזאת בניגוד למצב בפיזיקה ניוטונית, שם ההנחה הנסתרת שמרווחי זמן הם זהים עבור כל צופה נמצאת בעצם בבסיסם של חוקי המכניקה.

שימו לב להבדל בין הגישות לבעיה:

- ניוטון קיבל כמובן מאיליו את מה שנראה כמובן מאיליו
- איינשטיין נתן תיאור אופרטיבי מדויק של דברים שנראים מובנים מאליהם, וע"י כך הצליח "לחשוב מחוץ לקופסה" ולקבלם כלא בהכרח נכונים
- (שלא לזלזל בניוטון: התגליות שלו היו בעלות חשיבות מהמעלה הראשונה והיו נחוצות לפני שאפשר היה לחשוב על תורת היחסות. בנוסף, והקונפליקט בין מכניקה לתורה האלקטרומגנטית לא היה קיים בזמנו של ניוטון, כך שלא היה צורך לפקפק באוניברסליות של הזמן).

נמשיך: הקשר שמצאנו בין מרווחי הזמן בשתי המערכות הוא

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} > \Delta t}$$

כאשר $\beta \equiv V/c$,

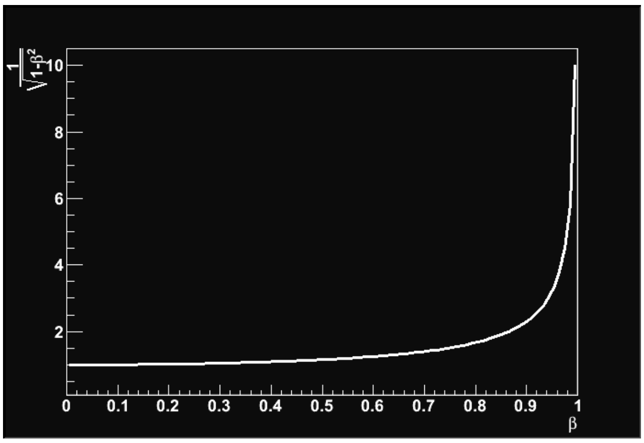
וכאשר $\Delta t'$ הוא הפרש הזמן במערכת החללית (שבה "שעון" המראות נמצא במנוחה),

ו- Δt הוא הפרש הזמן במערכת כדוה"א.

אז רואים שהפרש הזמן מתארך בכל מערכת שאינה מערכת המנוחה של ה"שעון".

תופעה זו נקראת **התארכות הזמן**

כך נראה המקדם $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ כפונקציה של β:



שימו לב: המקדם מתבדר כאשר β שואף ל-1, והוא מדומה עבור β גדול מ-1.

כלומר, **<u>עקרון קביעות מהירות האור מחייב שגופים לא ינועו מהר מ-c</u>**, אחרת מרווחי זמן אינם מוגדרים כגדלים ממשיים.

לעומת זאת, כלל חיבור המהירויות של גלילי אומר שאם O' נעה במהירות 0.8c ביחס ל-O, ו-O'' נעה במהירות 0.8c ביחס ל-O', אז O'' נעה במהירות 1.6c ביחס ל-O.

זה מרמז שנצטרך לפתור בעיה זו, מן הסתם ע"י שינוי כלל חיבור המהירויות, והסבר מדוע גופים אינם יכולים לנוע מהר ממהירות האור.

<u>הגדרת זמן עצמי ומערכת עצמית:</u>

תהי O מערכת בה מתרחשים שני מאורעות באותו המקום (למשל, שתי פגיעות של הבזק האור במראה העלונה). מערכת כזו נקראת **המערכת העצמית או מערכת המנוחה של המאורעות.** הפרש הזמן בין שני המאורעות במערכת זו נקרא **הזמן העצמי** (**Proper Time**) של המאורעות ומסומן ב- $\Delta\tau$. בכל מערכת אחרת O' הנעה במהירות V ביחס ל-O, הפרש הזמן שימדד בין המאורעות הוא $\Delta t' = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$, כאשר $\beta \equiv V/c$.

שימו לב: **הפרש הזמן הנמדד בין שני המאורעות הוא תמיד הקצר ביותר במערכת העצמית, מערכת המנוחה של המאורעות.**

שאלות בית:

1. במקום באמצעות קרן אור, נמדוד מרווחי זמן בחללית באמצעות כדור בעל מסה m הנע בין המראות במהירות v והעובר התנגשויות אלסטיות לחלוטין במראות. הסבירו מדוע אי אפשר לגזור באמצעות ניסוי מחשבה זה את גודל מרווחי הזמן בין פגיעות במראה כפי שהם נמדדים במעבדה על כדוה"א.
2. הסבירו אם התארכות הזמן רלוונטית רק לשעון שמשתמש בקרני אור או גם בשעון מכני.
3. הסבירו כיצד התארכות הזמן פוגמת בשיטת סינכרון השעונים בה בנינו את מערכת הייחוס הראשונה בקורס – ע"י העברת השעונים ממקום למקום.
4. העריכו את היחס בין $\Delta t'$ ל- Δt עבור טיסה במטוס.

אם $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ כל כך קרוב ל-1 חוץ מאשר עבור ערכים של β מסדר גודל של מהירות האור,

איך נוכל לאמת את התארכות הזמן באופן ניסיוני?

ניסוי המיואונים:

ניתן להשתמש לשם כך בחלקיקים שנעים קרוב למהירות האור.

בשנות הארבעים נעשו ניסויים רבים באמצעות מיואונים (muons, המסומנים באות μ), הנוצרים בגובה רב באטמוספירה ע"י קרינה קוסמית – בעיקר פרוטונים רבי-אנרגיה המגיעים מהחלל.

למיואונים זמן חיים ממוצע $\tau_\mu = 2.2 \times 10^{-6}$ שניות במערכת המנוחה שלהם.

כלומר, אם בזמן t_1 יש בידינו N_1 מיואונים **במנוחה**, אז בזמן t_2 נותרים לנו

$N_2 = N_1 e^{-\Delta t/\tau_\mu}$ מיואונים, כאשר $\Delta\tau = t_2 - t_1$.

שאר המיואונים עברו דעיכה רדיואקטיבית לאלקטרון (שנעצר באויר לאחר מספר מטרים) וניוטרינים (חלקיקים שכמעט שאינם ניתנים לזיהוי).

לכן, מדידת מספר מיואונים בשני זמנים שונים כמוה כמדידת זמן במערכת המיואונים, ע"י היחס

$$\Delta t = \tau_\mu \ln \frac{N_1}{N_2}$$

בעקרון זה משתמשים גם לתארוך רדיואקטיבי של דגימות ארכיאולוגיות וגיאולוגיות.

ב-1941, Rossi and Hall (Phys. Rev. 59, 223-228) מדדו את קצב הגעת מיואונים בעלי מהירויות בתחום מסוים בגובה 3240 ובגובה 1616 מטרים מעל פני הים. עבור מיואונים בתחום מסוים של אנרגיות גבוהות, הם מצאו את הקצבים הבאים:

1616 m: $N_{1616} = 4.79 \pm 0.03$ muons/minute

3240 m: $N_{3240} = 6.49 \pm 0.07$ muons/minute

ידוע שצריך להתקיים הקשר $\frac{N_{1616}}{N_{3240}} = e^{-\Delta\tau/\tau}$, כאשר Δτ הוא הזמן – **במערכת המנוחה של המיואונים** – שלוקח למיואונים לעבור את המרחק בין שני מכשירי המדידה, ב-3240 וב-1616 מטר מעל פני הים.

מכאן שבמערכת המנוחה של המיואונים, הזמן שעבר היה

$$\Delta\tau = -\tau \ln\frac{N_{1616}}{N_{3240}} = 2.2\mu s \times 0.304 = 0.67\mu s.$$

כעת נמצא את הפרש הזמן Δt שעבר במערכת כדוה"א במהלך מעבר המיואון בין שני הגלאים.
אם נניח שהמיואונים נעו כמעט במהירות האור, (טענו כבר שאינם יכולים לנוע מהר מכך), אז את המרחק של $d = 3240 - 1616\ m = 1624\ m$ עליהם לעבור בזמן $\Delta t \sim d/c = 5.4\mu s$.
אך ראינו שבמערכת המנוחה שלהם עברו רק 0.67 μs.

נשתמש בכלל התארכות הזמן כדי למצוא את מהירותם מתוך היחס בין הזמנים:

$\Delta t / \Delta\tau \approx 5.4/0.67 \approx 8.1 = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, כלומר,

$$\beta == \sqrt{1 - \frac{1}{(\Delta t/\Delta\tau)^2}} = 0.992$$

אז מתוך:

1. ההנחה שהמיואונים אינם יכולים לנוע מהר ממהירות האור,
2. מדידת זמן החיים של מיואונים במנוחה,
3. מדידת קצב התמעטות המיואונים עם מרחק תעופתם,

ראינו נסיונית שהתארכות הזמן מתקיימת.

(למעשה, ב-1941 כבר היה ידוע היטב שתורת היחסות נכונה, ותוצאות הניסוי שימשו להוכחה שהמיואונים דועכים ולמדידת זמן החיים שלהם τ.)

הערה: מיואונים נוצרים באטמוספירה בגובה של מספר עשרות ק"מ.
במערכת כדוה"א לוקח להם כ- 33 μs – כ-15 זמני חיים – לעבור 10 ק"מ.
במערכת המנוחה של מיואון עם β = 0.992, עוברים רק $15/\sqrt{1-\beta^2} \sim 15/8 \sim 1.9$ זמני חיים.

אלמלא התארכות הזמן, שטף המיואונים האלה היא קטן פי $1/3000 \sim e^{-8}$ ממה שנצפה.

התקצרות המרחק (Length contraction)

נתבונן במיואון שנע במהירות $\beta = 0.992$ לעבר כדור הארץ.

המיואון "רואה" את כדוה"א **נע לעברו** במהירות $\beta = -0.992$.
כבר אמרנו שהמיואון עובר את המרחק בין שני מכשירי המדידה של רוסי והול בתוך פרק זמן שבמערכת המיואון הוא $\Delta\tau = 0.67\ \mu s$.
כלומר, הוא רואה את שתי הנקודות האלה על-פני כדוה"א חולפות על פניו בתוך זמן זה.
לכן הוא "מודד" את המרחק בין מכשירי המדידה להיות $\Delta z' = \Delta\tau\ \beta c$.

מאידך, צופה על כדוה"א רואה את המיואון נע באותה מהירות ועובר את המרחק בזמן המרחק הזה בזמן ארוך יותר, $\Delta t = \dfrac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$. עבור צופה זה, המרחק שעבר המיואון הוא

$$\Delta z = \Delta t\,\beta c = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}\beta c = \frac{\Delta z'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

שימו לב ש-Δz הוא המרחק בין שני המכשירים במערכת המנוחה שלהם.
אז בכל מערכת אחרת (כגון מערכת המיואון), המרחק נראה קצר יותר, $\Delta z' = \Delta z\sqrt{1-\beta^2}$.

אם כך: **המרחק הנמדד בין שתי נקודות שנמצאות במנוחה באותה מערכת אינרציאלית תמיד ארוך ביותר במערכת המנוחה של הנקודות.**

שימו לב: התקצרות האורך והתארכות הזמן קשורות: בדוגמה זו ראינו שהתקצרות האורך נובעת מכך שמדידת מרחק מתבצעת ע"י מדידת הזמן שלוקח לשתי נקודות שעל גוף בעל מהירות מסוימת לעבור את הראשית במערכת של הצופה.
שימו לב: צורת מדידה זו קונסיסטנטית עם צורות מדידה אחרות (למשל, השוואה בו-זמנית של המרחק בין הנקודות לאורכו של סרגל), ולכן התקצרות האורך אינה תלויה בצורת המדידה, כל זמן שאיננו משנים את המשמעות הרגילה של "אורך".

שינוי האורך בניצב למהירות

שימו לב שאת התארכות הזמן גזרנו תחת ההנחה שהמימד הניצב לתנועת החללית לא השתנה. הנחנו זאת כשכתבנו את המרחק שעוברת קרן האור בין התנגשויות מראה כפי שהוא נמדד במערכת כדוה"א: $d=\sqrt{d'^2+(V\Delta t)^2}$, כאשר d הוא המרחק בין המראות במערכת החללית.

כעת כשידוע שאורכים מתקצרים (לפחות בכוון התנועה היחסית בין המערכות), עלינו לבדוק שלא עשינו טעות בהנחה זו.

נתבונן בשני צינורות בעלי אותו קוטר הניצבים זה מול זה בכוון x.
בתוך כל צינור ישנו חיישן מגע ששומר את המידע זמן רב לאחר שנגעו בו.

כעת נניע צינור אחד ביחס לשני במהירות β בכוון x, ולאחר שהצינורות יחליפו את מקומותיהם נעצור אותם ונבדוק את החיישנים.

נניח שמתקיימת התקצרות אורך במימד הניצב.
אז צינור 1 רואה את עצמו בעל קוטר גדול מצינור 2. בסוף התנועה, החיישן שלו יראה שצינור 2 עבר בתוכו.
אבל גם צינור 2 רואה את עצמו בעל קוטר גדול מצינור 1, ובסוף התנועה החיישן שלו יראה שצינור 1 עבר בתוכו.
מכאן נסיק שכל אחד מהצינורות התפצל והיה גם בתוך הצינור השני וגם מחוצה לו.
מסקנה זו מעלה סיבוכים ואינה פותרת שום בעיה, כך שאין שום מוטיבציה לדגול בה.

לכן נסיק שלא מתקיים שינוי אורך במימדים הניצבים לתנועה.
לבסוף, יהיה צורך לבדוק את נכונות מסקנה זו, כמו כל המסקנות של התיאוריה.