חוברת תרגולים בחשבון אינפיניטסימלי 3, 88-230

אלעד עטייא

31 בינואר 2016

תוכן עניינים

1 נורמות ומכפלות פנימיות

1.1 מכפלה פנימית

הגדרה 1.1 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ (שדה המרוכבים או שדה הממשיים). פונקציה $\mathbb{F} \to V \times V : \langle , \rangle$ נקראת **מכפלה פנימית** מעל המרחב V**,** אם היא מקיימת את התכונות הבאות:

1. ליניאריות ברכיב הראשון: $\langle au+v,w\rangle = a\cdot\langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$ לכל $a\in\mathbb{F}$ ולכל $u,v,w\in V$.
2. הרמיטיות: $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$.
3. אי־שליליות:
   (א) $\langle v,v\rangle \geq 0$ לכל $v\in V$.
   (ב) $\langle v,v\rangle = 0 \iff v=0$.

מרחב שעליו מוגדרת מכפלה פנימית נקרא, למרבה ההפתעה, **מרחב מכפלה פנימית**.

<u>לדוגמה:</u>

1. המכפלות הפנימיות הסטנדרטיות:
   (א) במרחב $\mathbb{R}^n$ נגדיר: $\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$.
   (ב) במרחב $\mathbb{C}^n$ נגדיר: $\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}$.
2. במרחב הסתברותי של משתנים מקריים (מבלי להיכנס לאפיון של מרחב כזה כמרחב וקטורי) נגדיר: $\langle X,Y\rangle = E\left(XY\right)$ כאשר E מסמלת את התוחלת. מתכונות התוחלת ניתן לראות שתכונות המכפלה הפנימית אכן מתקיימות.
3. במרחב הפונקציות הרציפות בקטע I, $C[I]$, נגדיר: $\langle f,g\rangle = \int_I f(x)\overline{g(x)}dx$. מתכונות האינטגרל ניתן לראות שזו אכן מכפלה פנימית.
4. במרחב מטריצות מסדר מסוים, נגדיר: $\langle A,B\rangle = tr\left(B^T A\right)$. מתכונות העקבה ניתן לראות שזו אכן מכפלה פנימית.

1.2 נורמה

הגדרה 1.2 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. פונקציה $\|\| : V \to \mathbb{R}$ נקראת **נורמה**, אם היא מקיימת את התכונות הבאות:

1. אי־שליליות:

   (א) $\|u\| \geq 0$ לכל $u \in V$.

   (ב) $u = 0 \iff \|u\| = 0$.

2. הומוגניות: $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$ לכל $\lambda \in \mathbb{F}$ ולכל $u \in V$.

3. אי־שוויון המשולש: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ לכל $u, v \in \mathbb{F}$.

מרחב שעליו מוגדרת נורמה נקרא **מרחב נורמי**.

הגדרה 1.3 יהי V מרחב מכפלה פנימית. **הנורמה המושרית** מהמכפלה הפנימית מוגדרת על ידי:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

תכונות הנורמה נובעות ישירות מתכונותיה של המכפלה הפנימית במקרה זה.

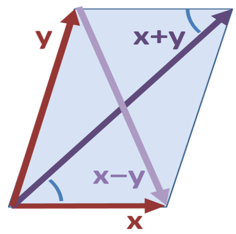
אינטואיטיבית, נורמה מגדירה גודל.

משפט 1.4 יהי V מרחב נורמי. הנורמה מושרית על ידי מכפלה פנימית אם ורק אם היא מקיימת את **שוויון המקבילית**:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

לכל $u, v \in V$.

כלל המקבילית הוא משפט בגיאומטריה אוקלידית הקבוע כי סכום ריבועי ארבע צלעות המקבילית שווה לסכום ריבועי אלכסוניה. זהו מקרה פרטי של שוויון המקבילית שלנו:



אם שתי הצלעות נתונות על ידי הוקטורים x, y, האלכסונים הם הוקטורים $x - y, x + y$.

<u>תרגיל:</u>

במרחב $C[0,1]$ נגדיר:

$$\|f\|_{max} = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

הראו שזו נורמה. האם הנורמה מושרית ממכפלה פנימית?

<u>פתרון:</u>

נראה שהפונקציה מקיימת את שלוש התכונות הנדרשות מנורמה.

1. ערך מוחלט הוא אי־שלילי ולכן הפונקציה אי שלילית. כעת, אם $f = 0$, אכן מתקיים: $\|f\|_{max} = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| = \max\{0\} = 0$. מצד שני, אם מתקיים

$$\|f\|_{max} = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0$$

אז מהגדרת מקסימום $|f(x)| \leq 0$ לכל איבר בקטע ומהגדרת ערך מוחלט נקבל שאכן $f(x) = 0$.

2. הומוגניות:

$$\|\lambda f\|_{max} = \max_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot \max_{x\in[0,1]} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_{max}$$

.

3. אי־שוויון המשולש:

$$\|f+g\|_{max}=\max_{x\in[0,1]}|(f+g)(x)|=\max_{x\in[0,1]}|f(x)+g(x)|\leq\max_{x\in[0,1]}\{|f(x)|+|g(x)|\}$$

מאי־שוויון המשולש של ערך מוחלט. כעת:

$$\max_{x\in[0,1]}\{|f(x)|+|g(x)|\}\leq\max_{x\in[0,1]}|f(x)|+\max_{x\in[0,1]}|g(x)|=\|f\|_{max}+\|g\|_{max}$$

והוכחנו את הדרוש.

נבדוק אם שוויון המקבילית מתקיים.

נתבונן בפונקציות: $f(x)=x, g(x)=1-x$.

מצד אחד, מתקיים: $\|f\|_{max}=\|g\|_{max}=1$.

מצד שני,

$$\|f+g\|_{max}=\|x+1-x\|_{max}=\|1\|_{max}=1$$

$$\|f-g\|_{max}=\|x-(1-x)\|_{max}=\|2x-1\|_{max}=1$$

ואם כך:

$$\|f+g\|_{max}^2+\|f-g\|_{max}^2=2\neq 4=2\cdot(1+1)=2\left(\|f\|_{max}^2+\|g\|_{max}^2\right)$$

כלומר, שוויון המקבילית לא מתקיים, ולפי המשפט הנורמה אינה מושרית ממכפלה פנימית.

<u>דוגמאות נוספות לנורמות:</u>

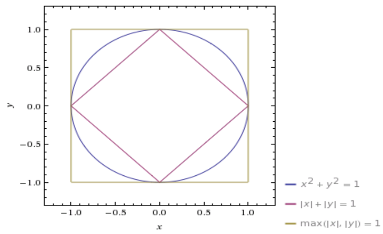
1. נורמת L_p מוגדרת ב־$\mathbb{R}^n$ על ידי:

$$\|u\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

כאשר $p \geq 1$ ממשי או $p = \infty$.

נורמת L_2 היא הנורמה האוקלידית, והיא מכונה גם **הנורמה הסטנדרטית**.

מעניין לראות איך נראה מעגל היחידה, $\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \middle| \left\| x \right\|_p = 1 \right\}$ עבור ערכים שונים של p:



כאשר $p = \infty$, אנו נשארים עם הגדולה מבין הקואורדינטות, מכיוון שבשאיפה לאינסוף רק החזק שורד.

2. בהינתן שני מרחבים נורמיים A, B, נורמת האופרטור על המרחב $Hom\left(A, B\right)$ מוגדרת על ידי:

$$\left\| T \right\| = \sup_{x \in A, \left\| x \right\|_A = 1} \left\| T(x) \right\|_B$$

כלומר, סופרימום של הנורמות של התמונות של וקטורי היחידה ב־A. פשוט.

<u>תרגיל:</u>

האם ההשתנות הכללית (החסומה) של פונקציה היא נורמה במרחב $C[a,b]$?

ההשתנות הכללית $V_b^a(f)$ מוגדרת על ידי: $V_b^a(f) = \sup_\tau \left\{ v\left(f, \tau\right) \right\}$, כאשר:

$$v\left(f, \tau\right) = \sum_{i=1}^{n} \left| f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right) \right|$$

היא ההשתנות של f לפי החלוקה τ.

הסופרימום הוא על כל החלוקות של הקטע $[a,b]$.

<u>פתרון:</u>

לא. ההשתנות של כל פונקציה קבועה היא 0 אף על פי שהפונקציה עצמה אינה פונקציית האפס.

לכן תכונות האי־שליליות אינה מתקיימת וזו אינה נורמה.

משפט 1.5 אי־שוויון קושי־שוורץ

יהי V מרחב מכפלה פנימית, אזי לכל $u,v\in V$ מתקיים:

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|$$

כאשר הנורמה היא הנורמה המושרית מהמכפלה הפנימית.

<u>תרגיל:</u>

הראו שבמרחבים נורמיים בהם הנורמה מושרית ממכפלה פנימית, אי־שוויון המשולש נובע מאי־שוויון קושי־שוורץ.

<u>פתרון:</u>

$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|$, ולכן $2\cdot|\langle u,v\rangle| \leq 2\left(\|u\|\cdot\|v\|\right)$.

נוסיף לשני האגפים $\|u\|^2+\|v\|^2$ ונקבל:

$$2\cdot|\langle u,v\rangle| + \|u\|^2 + \|v\|^2 \leq 2\left(\|u\|\cdot\|v\|\right) + \|u\|^2 + \|v\|^2 \leq \left(\|u\|+\|v\|\right)^2$$

כעת, לפי הגדרת הנורמה: $\|u+v\|^2 = \langle u+v,u+v\rangle$. נשתמש בתכונות המכפלה הפנימית ובתכונות הצמוד כדי לקבל:

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v,u+v\rangle = \langle u,u+v\rangle + \langle v,u+v\rangle = \overline{\langle u+v,u\rangle} + \overline{\langle u+v,v\rangle} =$$

$$= \overline{\langle u,v\rangle} + \overline{\langle u,u\rangle} + \overline{\langle v,u\rangle} + \overline{\langle v,v\rangle} = \|u\|^2+\|v\|^2+\overline{\langle v,u\rangle}+\langle v,u\rangle = \|u\|^2+\|v\|^2+2Re\left(\langle v,u\rangle\right)$$

$$\leq \|u\|^2+\|v\|^2+2\cdot|\langle u,v\rangle| \leq \left(\|u\|+\|v\|\right)^2$$

ואם כך:

$$\|u+v\|^2 \leq \left(\|u\|+\|v\|\right)^2$$

נוציא שורש ונקבל:

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

וקיבלנו את הדרוש.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו את אי־השיוויון:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

<u>פתרון:</u>

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n}|x_i||x_j| = \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ i\neq j}}|x_i||x_j| \geq \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$$

ואם נוציא שורש נקבל את הדרוש. לאי־השיוויון השני, נסמן:

$$x = (|x_1|,...,|x_n|), y = (1,...,1)$$

ולפי א"ש קושי־שוורץ:

$$| < x,y > | \leq ||x|| \cdot ||y||$$

נקבל:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i| = | < x,y > | \leq ||x|| \cdot ||y|| = \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

ואם נחלק ב־$\sqrt{n}$ נקבל את הדרוש.

תרגילים נוספים

1. הוכיחו את "אי־שוויון המשולש השני" במרחב נורמי:

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u \pm v\|$$

הסיקו שאם סדרת וקטורים $\{u_n\}$ מקיימת: $\|u_n - u\| \to 0$ אז $\|u_n\| \to \|u\|$.

2. יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ ותהי $\{x_1, \ldots, x_n\}$ קבוצה אורתונורמלית. יהי $x \in V$ כלשהו. הוכיחו שמתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

3. יהיו X, Y מרחבים נורמיים. מי מהפונקציות הבאות היא נורמה על $X \times Y$? הסבירו. החיבור והכפל מוגדרים איבר־איבר.

(א) $\|(x, y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

(ב) $\|(x, y)\|_2 = \|x\|_X \cdot \|y\|_Y$.

(ג) $\|(x, y)\|_3 = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$.

4. הוכיחו את הזהויות הבאות במרחב מכפלה פנימית, כאשר הנורמה היא זו המושרית מהמכפלה הפנימית:

(א) מעל $\mathbb{R}$: $\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2\right)$.

(ב) מעל $\mathbb{C}$: $\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + vi\|^2 - i\|u - vi\|^2\right)$.

5. הוכיחו שאם מרחב נורמי $(V, \|\|)$ מעל $\mathbb{R}$ מקיים את שוויון המקבילית, אזי הפונקציה:

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2\right)$$

היא המכפלה הפנימית מעל V המשרה את הנורמה.

הדרכה:

יש להוכיח את אקסיומות המכפלה הפנימית ושאכן $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$.

הדבר היחיד שאינו מיידי הוא הליניאריות ברכיב הראשון.

הוכיחו בשלבים: קודם אדיטיביות ואז מולטיפלטביות.

פתרונות

1. נוכיח: $\left|\|u\|-\|v\|\right| \le \|u-v\|$. אי־השוויון השני נובע ממנו:

$$\left|\|u\|-\|v\|\right| = \left|\|u\|-\|-v\|\right| \le \|u-(-v)\| = \|u+v\|$$

אם כן, נשים לב לכך ש: $u = v + (u-v)$ ולכן לפי אי־שוויון המשולש:

$$\|u\| \le \|v\| + \|u-v\| \Longrightarrow \|u\|-\|v\| \le \|u-v\|$$

מאותה הסיבה, $\|v\|-\|u\| \le \|v-u\|$, אך $\|v-u\| = \|u-v\|$ ולכן:

$$\|u-v\| \ge \max\left\{\|v\|-\|u\|, \|u\|-\|v\|\right\} = \left|\|u\|-\|v\|\right|$$

והוכחנו את הדרוש. מאי־השוויון נקבל:

$$0 \le \|u_n\|-\|u\| \le \|u_n-u\| \to 0$$

ולכן לפי כלל הסנדוויץ', $\|u_n\|-\|u\| \to 0$ כלומר אכן:

$$\|u_n\| \to \|u\|$$

2. נתבונן במרחב הוקטורי $span\left\{x_1\ldots,x_n,x\right\}$. נסמן את המימד של המרחב ב־k.

אם x תלוי ליניארית ב־$x_1,\ldots,x_n$, המימד הוא n.

אם לא אז המימד הוא $n+1$ (קבוצה אורתונורמלית היא בת"ל).

בכל אופן, $k \ge n$, ונעבור מ־n ל־k.

לפי גרם־שמידט נעבור לבסיס אורתונורמלי: $\{x_1,\dots,x_k\}$ (כל האיברים זהים לאיברים הקודמים למעט אחד שאולי נוסף). נציג את x כצירוף ליניארי של איברי הבסיס: $x=\sum_{i=1}^k a_i x_i$. כעת, לפי הליניאריות:

$$\|x\|^2=|\langle x,x\rangle|^2\left|\left\langle \sum_{i=1}^k a_i x_i, \sum_{j=1}^k a_j x_j\right\rangle\right|^2=\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k |a_i a_j \langle x_i,x_j\rangle|$$

מהאורתונורמליות,

$$\langle x_i,x_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

ולכן:

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^k |a_i|^2$$

אך מי הם a_i? מהליניאריות:

$$a_i=\sum_{j=1}^k a_j\langle x_i,x_j\rangle=\left\langle x,\sum_{j=1}^k a_j x_j\right\rangle=\langle x_i,x\rangle$$

ולכן:

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^k |a_i|^2\geq\sum_{i=1}^k a_i^2\geq\sum_{i=1}^n a_i^2=\sum_{i=1}^n\langle x_i,x\rangle$$

שהרי $k\geq n$.

3. נבדוק האם התכונות מתקיימות.

(א) הפונקציה השנייה אינה נורמה, מכיוון שאי־שליליות אינה מתקיימת; איבר האפס במרחב $X\times Y$ הוא $(0_X,0_Y)$ ולכן איבר מהצורה $(x,0_Y)$ כאשר $x\neq 0_X$ אינו איבר האפס, אך מקיים:

$$\|(x,0_Y)\|_2=\|x\|_X\cdot\|0_Y\|_Y=\|x\|_X\cdot 0=0$$

אפשר לדייק יותר; רק כאשר שני המרחבים הם טריוויאליים, $X=Y=\{0\}$, זוהי אכן נורמה.

(ב) הפונקציות הראשונה והשלישית הן אכן נורמות; נראה זאת.

i. אי־שליליות: מכיוון שלכל $(x,y)\in X\times Y$, $\|x\|_X, \|y\|_Y \geq 0$, נקבל:

$$\|(x,y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y \geq 0, \|(x,y)\|_3 = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} \geq 0$$

כעת,

$$(x,y) = (0,0) \Longrightarrow \|x\|_X, \|y\|_Y = 0 \Longrightarrow \|(x,y)\|_3, \|(x,y)\|_1 = 0$$

לצד שני, אם $(x,y)\neq(0,0)$ אז בה"כ $x\neq 0$ ואז $\|x\|_X > 0$ ולכן גם:

$$\|(x,y)\|_3, \|(x,y)\|_1 > 0$$

וסה"כ אי־שליליות מתקיימת עבור שתי הנורמות.

ii. הומוגניות:

$$\|\lambda(x,y)\|_1 = \|(\lambda x, \lambda y)\|_1 = \|\lambda x\|_X + \|\lambda y\|_Y = |\lambda|\cdot\|x\|_X + |\lambda|\cdot\|y\|_Y = |\lambda|\cdot\|(x,y)\|_1$$

כמו כן:

$$\|\lambda(x,y)\|_3 = \|(\lambda x, \lambda y)\|_3 = \max\{\|\lambda x\|_X, \|\lambda y\|_Y\} = \max\{|\lambda|\cdot\|x\|_X, |\lambda|\cdot\|y\|_Y\} = |\lambda|\cdot\|(x,y)\|_3$$

ולכן הומוגניות מתקיימת.

iii. א"ש המשולש:

$$\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\|_1 = \|(x_1+x_2, y_1+y_2)\|_1 = \|x_1+x_2\|_X + \|y_1+y_2\|_Y \leq$$

$$\leq \|x_1\|_X + \|x_2\|_X + \|y_1\|_Y + \|y_2\|_Y = \|(x_1,y_1)\|_1 + \|(x_2,y_2)\|_1$$

וכן:

$$\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\|_3 = \|(x_1+x_2, y_1+y_2)\|_3 = \max\{\|x_1+x_2\|_X, \|y_1+y_2\|_Y\} \leq$$

$$\leq \max\{\|x_1\|_X, \|y_1\|_Y\} + \max\{\|x_2\|_X, \|y_2\|_Y\} = \|(x_1,y_1)\|_3 + \|(x_2,y_2)\|_3$$

אי־השוויון נובע מכך ש:

$$\|x_1+x_2\|_X \leq \|x_1\|_X+\|x_2\|_X \leq \max\{\|x_1\|_X, \|y_1\|_Y\}+\max\{\|x_2\|_X, \|y_2\|_Y\}$$

וגם:

$$\|y_1+y_2\|_Y \leq \|y_1\|_Y+\|y_2\|_Y \leq \max\{\|x_1\|_X, \|y_1\|_Y\}+\max\{\|x_2\|_X, \|y_2\|_Y\}$$

ואם כן הוכחנו את שלוש התכונות הנדרשות עבור כל אחת מהפונקציות.

4. נשתמש בתכונות המכפלה הפנימית ב־$\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\langle u+v,u+v\rangle-\langle u-v,u-v\rangle\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\langle u,u+v\rangle+\langle v,u+v\rangle-\langle u,u-v\rangle-\langle -v,u-v\rangle\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\langle u,u+v\rangle+\langle v,u+v\rangle+\langle u,v-u\rangle+\langle v,u-v\rangle\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\langle u,u+v+v-u\rangle+\langle v,u+v+u-v\rangle\right)=\frac{1}{4}\left(\langle u,2v\rangle+\langle v,2u\rangle\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle+2\langle v,u\rangle\right)=\frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle+2\langle u,v\rangle\right)=\langle u,v\rangle$$

ב־$\mathbb{C}$, כל השוויונות למעט האחרון עדיין תקפים, ולכן:

$$\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle+2\langle u,v\rangle\right)=\frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle+2\overline{\langle u,v\rangle}\right)$$

כמו כן:

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\left(i\|u+iv\|^2-i\|u-iv\|^2\right)=\frac{i}{4}\left(\|u+iv\|^2-\|u-iv\|^2\right)=$$

$$=\frac{i}{2}\left(\langle u,iv\rangle+\overline{\langle u,iv\rangle}\right)=\frac{i}{2}\left(-i\langle u,v\rangle+i\overline{\langle u,v\rangle}\right)=\frac{1}{2}\left(\langle u,v\rangle-\overline{\langle u,v\rangle}\right)$$

ולכן:

$$\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2+i\|u+vi\|^2-i\|u-vi\|^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle+2\overline{\langle u,v\rangle}\right)+\frac{1}{2}\left(\langle u,v\rangle-\overline{\langle u,v\rangle}\right)=\langle u,v\rangle$$

והוכחנו את הדרוש.

5. נבדוק שהמכפלה הפנימית משרה את הנורמה, ושתכונות המכפלה הפנימית מתקיימות.

(א) מתקיים:

$$\langle u,u\rangle=\frac{1}{4}\left(\|u+u\|^2-\|u-u\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\|2u\|^2-\|0\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(4\|u\|^2\right)=\|u\|^2$$

ולכן הנורמה אכן מושרית מהמכפלה הפנימית (אם היא אכן כזו).

(ב) לפי חוקי הנורמה, $\langle u,u\rangle=\|u\|^2\geq 0$ וגם:

$$u=0\iff\|u\|=0\iff\langle u,u\rangle=\|u\|^2=0$$

ולכן אי־שליליות מתקיימת.

(ג) סימטריות (אנחנו מעל $\mathbb{R}$) היא טריוויאלית:

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\|v+u\|^2-\|v-u\|^2\right)=\langle v,u\rangle$$

(ד) נראה שמתקיימת אדיטיביות, כלומר: $\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$. נכפיל הכל ב־$8$ כדי לא להתעסק עם שברים, ואנו צריכים להוכיח את השוויון השקול:

$$8\langle u+v,w\rangle-8\langle u,w\rangle-8\langle v,w\rangle=0$$

מהגדרת הפונקציה:

$$=2\|u+v+w\|^2-2\|u+v-w\|^2-2\|u+w\|^2+2\|u-w\|^2-2\|v+w\|^2+2\|v-w\|^2=$$

לפי שוויון המקבילית:

$$2\left(\|u\pm w\|^2+\|v\pm w\|^2\right)=\|u+v\pm 2w\|^2+\|u-v\|^2$$

ולכן הביטוי שלנו שווה ל:

$$2\|u+v+w\|^2-2\|u+v-w\|^2+\|u+v-2w\|^2+\|u-v\|^2-\|u+v+2w\|^2-\|u-v\|^2=$$

$$=2\|u+v+w\|^2-2\|u+v-w\|^2+\|u+v-2w\|^2-\|u+v+2w\|^2=$$

$$=\left(\|u+v-2w\|^2-2\|u+v-w\|^2\right)-\left(2\|u+v+w\|^2-\|u+v+2w\|^2\right)$$

שוב, לפי שוויון המקבילית:

$$2\left(\|u+v\pm w\|^2+\|\pm w\|^2\right)=\|u+v\pm 2w\|^2+\|u+v\|^2$$

וזה שקול ל:

$$\|u+v\pm 2w\|^2-2\|u+v\pm w\|^2=2\|\pm w\|^2-\|u+v\|^2$$

ולכן הביטוי שלנו שווה ל:

$$\left(2\|w\|^2-\|u+v\|^2\right)-\left(2\|-w\|^2-\|u+v\|^2\right)=0$$

ולכן אדיטיביות מתקיימת.

(ה) נוכיח מולטיפלטיביות, כלומר $\langle au,v\rangle=a\langle u,v\rangle$ נעשה זאת בשלבים.

i. ראשית, נוכיח באינדוקציה שהטענה נכונה לכל n טבעי. עבור $n=1$,

$$\langle 1\cdot u,v\rangle=\langle u,v\rangle=1\cdot\langle u,v\rangle$$

ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$. נניח שהטענה נכונה עבור $a-1$:

$$(a-1)\langle u,v\rangle=\langle (1-a)\,u,v\rangle$$

ונוכיח שהטענה נכונה עבור a:

$$\langle au,v\rangle = \langle (a-1+1)\,u,v\rangle = \langle (a-1)\,u,v\rangle + \langle 1\cdot u,v\rangle =$$

ולפי הנחת האינדקוציה:

$$= (a-1)\,\langle u,v\rangle + \langle u,v\rangle = a\,\langle u,v\rangle$$

ii. עבור $a=0$ הטענה טריוויאלית:

$$\langle 0u,v\rangle = \langle 0,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+0\|^2 - \|v-0\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|v\|^2 - \|v\|^2\right) = 0 = 0\,\langle u,v\rangle$$

iii. עבור $a\in\mathbb{Z}$ שלילי, מסעיף א' אנו יודעים:

$$\langle (-a)\,u,v\rangle = (-a)\,\langle u,v\rangle = -a\,\langle u,v\rangle$$

בעזרת אדיטיביות וסעיף ב':

$$\langle au,v\rangle + \langle (-a)\,u,v\rangle = \langle (a+(-a))\,u,v\rangle = \langle 0u,v\rangle = 0$$

ולכן גם $\langle (-a)\,u,v\rangle = -\langle au,v\rangle$ ומכאן:

$$\langle -au,v\rangle = -a\,\langle u,v\rangle$$

נכפיל את שני האגפים ב־-1 וסיימנו.

iv. עבור $a=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$, כאשר $m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}$, מתקיים $m=na$. מהסעיפים הקודמים:

$$n\,\langle au,v\rangle = \langle nau,v\rangle = \langle mu,v\rangle = m\,\langle u,v\rangle = na\,\langle u,v\rangle$$

נצמצם ב־n וסיימנו.

v. עבור $a\in\mathbb{R}$ כללי, ניקח סדרה $\{a_n\}\subset\mathbb{Q}$ ששואפת ל־a.

לפיכך, $a_n-a\to 0$ ולכן:

$$\|(a_n-a)\,u\| = |a-a_n|\cdot\|u\| \to 0$$

כמו כן, $(a_n - a)\,u = (a_n u \pm w) - (au \pm w)$ ולכן גם:

$$\|au \pm w\| - \|a_n u \pm w\| \to 0$$

לפי שאלה 1. לכן:

$$\langle au, w\rangle - \langle a_n u, w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|au + w\| - \|a_n u + w\| - \|au - w\| + \|a_n u - w\|\right) \to 0$$

כלומר $\langle a_n u, w\rangle \to \langle au, w\rangle$. ברור ש: $a_n \langle u, w\rangle \to a \langle u, w\rangle$.

לפי סעיף ד',

$$\langle a_n u, w\rangle = a_n \langle u, w\rangle$$

ולכן לפי יחידות הגבול:

$$\langle au, w\rangle = a \langle u, w\rangle$$

והוכחנו שמולטיפלטיביות מתקיימת. בסך הכל הוכחנו את הדרוש.

2 מרחבים מטריים

2.1 מטריקה

הגדרה 2.1 תהי A קבוצה. פונקציה $d : A \times A \to \mathbb{R}$ נקראת **מטריקה על** A אם היא מקיימת את התכונות הבאות:

1. אי־שליליות:

   (א) $d(x,y) \geq 0$ לכל $x, y \in A$.

   (ב) $x = y \iff d(x,y) = 0$.

2. סימטריות:

   $d(x,y) = d(y,x)$ לכל $x, y \in A$.

3. אי־שוויון המשולש:

   $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ לכל $x, y, z \in A$.

אינטואיטיבית, מטריקה מגדירה מרחק בקבוצה. קבוצה עליה מוגדרת מטריקה נקראת **מרחב מטרי**, ונסמן: (A,d).

<u>דוגמאות:</u>

1. כל נורמה משרה מטריקה, על ידי:

$$d\left(x,y\right)=\left\|x-y\right\|$$

אם לא מצוין במפורש אחרת, כאשר נתייחס אל $\mathbb{R}^n$ כאל מרחב מטרי נתכוון ל**מטריקה הסטנדרטית**, המטריקה אותה משרה הנורמה הסטנדרטית (האוקלידית).

2. מעל $\mathbb{R}^+$, הפונקציה $d(x,y)=\left|\ln\frac{y}{x}\right|$ היא מטריקה.

3. מעל מרחב נורמי V, הפונקציה:

$$d(x,y)=\begin{cases}\|x\|+\|y\| & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$$

היא מטריקה. מטריקה זו מכונה "מטריקת המסילה הבריטית" או "מטריקת משרד הדואר".

רכבת בריטית באיזור מנצ'סטר.

4. מעל קבוצה (לא ריקה...) כלשהי, הפונקציה:

$$d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$$

היא מטריקה. מטריקה זו נקראת **המטריקה הדיסקרטית**.

5. מעל מרחב המטריצות $M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$, הפונקציה $d(X,Y)=rank\left(Y-X\right)$ היא מטריקה.

<u>תרגיל:</u>

יהי $a\in\mathbb{N}$, $a\neq1$. נגדיר פונקציה $d_a:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ ע"י:

$$d_a(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \frac{1}{a^{k(x,y)}} & x\neq y\end{cases}$$

כאשר: $k(x,y)=max\{i:a^i|(x-y)\}$. הוכיחו שזו מטריקה.

<u>פתרון:</u>

קל לראות שתכונות החיוביות והסימטריות מתקיימות.

נראה שאי־שוויון המשולש אכן מתקיים.

יהיו $x,y,z\in\mathbb{Z}$ שאינם שווים זה לזה (אחרת זה ברור). נסמן: $m=\min\left\{k(x,y),k(y,z)\right\}$.

מתקיים:

$$a^m|x-y,a^m|y-z\longrightarrow a^m|(x-y)-(y-z)\longrightarrow a^m|(x-z)\longrightarrow m\leq k(x,z)$$

ולכן:

$$d(x,z)=\frac{1}{a^{k(x,z)}}\leq\frac{1}{a^m}=\max\left\{\frac{1}{a^{k(x,y)}},\frac{1}{a^{k(y,z)}}\right\}=\max\left\{d(x,y),d(y,z)\right\}\leq d(x,y)+d(y,z)$$

לכן א"ש המשולש מתקיים, וזו מטריקה.

<u>תרגיל:</u>

האם הפונקציות הבאות הן מטריקות על $A\times A$ כאשר A מרחב מטרי עם מטריקה d?

1. $D_1\left(\left(x,y\right),\left(x_1,y_1\right)\right)=\min\left\{d\left(x,x_1\right),d\left(y,y_1\right)\right\}$?

לא!

$$D_1\left(\left(1,3\right),\left(1,4\right)\right)=0$$

אך:

$$(1,3) \neq (1,4)$$

לכן תכונת החיוביות לא מתקיימת וזו אינה מטריקה.

2. $D_2\left(\left(x,y\right),\left(x_1,y_1\right)\right) = |x| + |y| + |x_1| + |y_1|$?

לא!

$$D_2\left(\left(1,1\right),\left(1,1\right)\right) = 4 \neq 0$$

לכן תכונת החיוביות לא מתקיימת, וזו אינה מטריקה.

3. $D_3\left(\left(x,y\right),\left(x_1,y_1\right)\right) = d\left(x,x_1\right) + d\left(y,y_1\right)$?

זו אכן מטריקה. d אי־שלילית ולכן גם D_3 אי־שלילית ובנוסף:

$$D_3\left(\left(x,y\right),\left(x_1,y_1\right)\right) = 0 \iff d\left(x,x_1\right) + d\left(y,y_1\right) = 0$$

$$\iff d\left(x,x_1\right), d\left(y,y_1\right) = 0 \iff x = x_1, y = y_1 \iff (x,y) = (x_1,y_1)$$

ולכן D_3 חיובית.

D_3 סימטרית כי d סימטרית. כעת, נזכור ש$-d$ מטריקה ולכן מקיימת את א"ש המשולש, ולכן:

$$D_3\left(\left(x,y\right),\left(x_2,y_2\right)\right) = d\left(x,x_2\right)+d\left(y,y_2\right) \leq d\left(x,x_1\right)+d\left(x_1,x_2\right)+d\left(y,y_1\right)+d\left(y_1,y_2\right)$$

$$= D_3\left(\left(x,y\right),\left(x_1,y_1\right)\right) + D_3\left(\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)\right)$$

2.2 כדורים פתוחים וסגורים

הגדרה 2.2 תהי A קבוצה ותהי d מטריקה על A. יהיו $a \in A$ ו-$r > 0$.

1. הקבוצה $B(a,r) = \{x \in A | d(x,a) < r\}$ נקראת **כדור פתוח** עם מרכז a ורדיוס r.
2. הקבוצה $B[a,r] = \{x \in A | d(x,a) \le r\}$ נקראת **כדור סגור** עם מרכז a ורדיוס r.

תרגיל:

יהיו $x_1, x_2 \in (X,d)$, $r_1, r_2 > 0$ ויהיו $B(x_1,r_1), B(x_2,r_2)$ כך ש:

$$B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2) \neq \phi$$

. תהי $p \in B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$ ונסמן:

$$r = \min\{r_1 - d(p,x_1), r_2 - d(p,x_2)\}$$

הוכיחו ש: $B(p,r) \subseteq B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$.

פתרון:

נוכיח קודם טענת עזר: תהי $p \in B(x,r)$ כך ש: $0 < r < R - d(x,p)$. אזי

$$B(p,r) \subseteq B(x,R)$$

.

יהי $y \in B(p,r)$. אזי, $r > d(p,y)$. כעת:

$$d(y,x) \le d(y,p) + d(p,x) < r + d(p,x) \le R$$

ולכן: $y \in B(x,R)$. לכן $B(p,r) \subseteq B(x,R)$.

כעת, מכיוון ש-$p \in B(x_1,r_1)$ ומטענת העזר נקבל שמתקיים: $B(p,r) \subseteq B(x_1,r_1)$ (כאשר: $x = x_1, r = r_1$). באופן דומה: $B(p,r) \subseteq B(x_2,r_2)$ ולכן:

$$B(p,r) \subseteq B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$$

כלומר, כאשר כדורים פתוחים נחתכים באופן לא ריק, אפשר למצוא כדור פתוח המוכל בחיתוך.

2.3 קבוצות פתוחות וסגורות

הגדרה 2.3 תהי A קבוצה ותהי d מטריקה עליה.

1. קבוצה $U \subseteq A$ נקראת **פתוחה**, אם לכל $x \in U$ קיים $r > 0$ כך ש: $B(x,r) \subseteq U$.
2. קבוצה $S \subseteq A$ נקראת **סגורה**, אם הקבוצה S^c פתוחה.
3. קבוצה שהיא גם סגורה וגם פתוחה מכונה (בהלחם־בסיסים נפלא) קבוצה **סגוחה** ($clopen$).

דוגמאות בסיסיות:

1. בכל מרחב מטרי (A,d), הקבוצות A,ϕ הן קבוצות פתוחות וסגורות.
2. בכל מרחב מטרי, כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה וכדור סגור הוא קבוצה סגורה (ללא תלות במרכז וברדיוס).
3. במטריקה הדיסקרטית, כל קבוצה היא פתוחה ולכן גם כל קבוצה היא סגורה.
4. ב$-\mathbb{R}$, קטעים פתוחים הם קבוצות פתוחות ולא סגורות וקטעים סגורים הם קבוצות סגורות ולא פתוחות.
5. ב$-\mathbb{R}$, קטעים חצי־פתוחים חצי־סגורים, למשל $[2,5)$, הם קבוצות לא פתוחות ולא סגורות.

תרגיל:

האם הקבוצות הבאות פתוחות? סגורות?

1. $\mathbb{Q}$ בתוך $\mathbb{R}$.

לא פתוחה, כי בכל כדור פתוח עם מרכז רציונלי יש נקודות אי־רציונליות.

באופן דומה, המשלים אינה פתוחה (בכל כדור פתוח עם מרכז אי־רציונלי יש נקודות רציונליות) ולכן לא סגורה.

2. $\{x\}$ בתוך $\mathbb{R}$ עבור $x \in \mathbb{R}$.

לא פתוחה, לכל $r > 0$, $B(x,r) \nsubseteq \{x\}$.

לכל $y \in \{x\}^c$ מתקיים: $B\left(y, \frac{|x-y|}{2}\right) \subseteq \{x\}^c$. לכן המשלים פתוחה ולכן $\{x\}$ סגורה.

משפט 2.4 יהי (A,d) מרחב מטרי. אזי:

1. אם $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף של קבוצות פתוחות, אז גם $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ קבוצה פתוחה.
2. אם $\{U_i\}_{i=1}^n$ אוסף סופי של קבוצות פתוחות, אז גם $\bigcap_{i=1}^n U_i$ קבוצה פתוחה.

מסקנה 2.5 בעזרת דה־מורגן נסיק:

1. אם $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף של קבוצות סגורות, אז גם $\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha$ קבוצה סגורה.
2. אם $\{S_i\}_{i=1}^n$ אוסף סופי של קבוצות סגורות, אז גם $\bigcup_{i=1}^n S_i$ קבוצה סגורה.

2.4 נקודות הצטברות

הגדרה 2.6 יהי (A,d) מרחב מטרי ותהי $x \in A$. x נקראת **נקודת הצטברות של** A אם לכל $r > 0$ קיים $y \in A$ כך ש־ $y \in B(x,r)$ ו־ $y \neq x$.

במקרה של מרחבים מטריים, כל נקודת הצטברות היא גם **נקודת גבול** (בהמשך נגדיר התכנסות במרחבים מטריים). עם זאת, באופן כללי המושגים לאו דווקא חופפים; תראו זאת בקורס בטופולוגיה.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את קבוצת נקודות ההצטברות של הקבוצות הבאות:

1. $\mathbb{Q}$ בתוך $\mathbb{R}$.

לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $r > 0$ קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש: $q \in B(x,r)$ ולכן קבוצת נקודות ההצטברות היא כל $\mathbb{R}$.

2. הקטע $(0,1)$ בתוך $\mathbb{R}$.

לכל $x \in [0,1]$ נסמן: $r = \frac{1}{2}\min\{|x|, |1-x|\}$ ואז הכדור $B(x,r)$ מוכל כולו בקטע $(0,1)$. עם אותו r נקבל שכל $x \notin [0,1]$ אינו נקודת הצטברות, ולכן סה"כ מדובר על $[0,1]$.

משפט 2.7 יהי (A,d) מרחב מטרי ותהי $S \subset A$. נסמן ב$-S'$ את קבוצת נקודות ההצטברות של S.

1. S סגורה אם ורק אם $S' \subseteq S$.

2. אם S פתוחה, $S \subseteq S'$.

לפיכך, בבואנו לבדוק האם קבוצה היא סגורה או לא, נוכל לבדוק האם היא מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה.

הגדרה 2.8 יהי (A,d) מרחב מטרי. נאמר שקבוצה $B \subseteq A$ היא **חסומה**, אם לכל נקודה $x_0 \in B$ קיים $r > 0$ עבורו $B \subseteq B(x_0, r)$.

תנאי שקול לכך הוא שקיימת נקודה x_0 וקיים $r > 0$ עבורם:

$$B \subseteq B(x_0, r)$$

מן הסתם, בעזרת התנאי השקול נוח יותר להראות שקבוצה היא אכן חסומה, בעוד שבעזרת ההגדרה המקורית נוח להראות שקבוצה אינה חסומה.

<u>תרגיל:</u>

האם הקבוצות הבאות חסומות?

1. $A = \{(x,y) \mid y = 0, x \in (0,1)\}$ ב$-\mathbb{R}^2$.

זהו הקטע $(0,1)$ על ציר ה$-x$ במישור. הקבוצה חסומה; הכדור $B\left(\left(\frac{1}{2}, 0\right), 2\right)$ מכיל אותה.

2. $B = \{(x,y) \mid x = y\}$ ב$-\mathbb{R}^2$.

הקבוצה אינה חסומה. לכל $r > 0$, הנקודה $(3r, 3r)$ נמצאת בקבוצה אך לא נמצאת בכדור $B((0,0), r)$.

3. $C=\{(x,y)\,|x>0,y<0,x+y>-1\}$ ב־$\mathbb{R}^2$.

הקבוצה אינה חסומה, כי לכל $r>0$, הנקודה $(1+10r,-1-10r)$ נמצאת בקבוצה אך לא נמצאת בכדור $B\left((1,-1),r\right)$.

משפט 2.9 בולצאנו ויירשטראס:

תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה אינסופית וחסומה. אזי, קיימת ל־A נקודת הצטברות.

2.5 קומפקטיות

הגדרה 2.10 יהי A מרחב מטרי ותהי $B\subseteq A$ קבוצה.

1. נאמר שאוסף של תת־קבוצות $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ הוא **כיסוי פתוח** של B, אם כל $A_\alpha\subseteq A$ היא פתוחה, ומתקיים:

$$B\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$$

2. **תת־כיסוי** הוא תת־קבוצה של כיסוי.

3. קבוצה $K\subseteq A$ נקראת **קומפקטית**, אם לכל כיסוי פתוח שלה קיים תת־כיסוי סופי.

כה אמרה ויקיפדיה:

"אינטואיטיבית, ניתן להבין את מושג הקומפקטיות כיכולת למדוד קבוצה בעזרת קבוצות פתוחות. על מנת שקבוצה תהיה ניתנת למדידה ,צריך לכסות אותה בעזרת מספר סופי של בדידים בדיוק כמו שמודדים מרחק ע"י חישוב מספר הבדידים באורך מטר שנכנסים בתוך הקטע הנמדד. לכל כיסוי יש אין סוף בדידים או קבוצות פתוחות, על מנת להצליח למדוד את הקבוצה עלינו לבחור מתוכם מספר סופי של בדידים ולכסות את הקבוצה. יכולת המדידה נבחנת ביכולת לכסות את הקבוצה לכל אין סוף סוגים של בדידים נתונים במספר סופי של בדידים".

משפט 2.11 היינה־בורל:

תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$. A קומפקטית $\iff$ A סגורה וחסומה.

באופן כללי, במרחב מטרי קבוצה קומפקטית היא סגורה וחסומה. משפט היינה־בורל נותן לנו את הכיוון השני ב־$\mathbb{R}^n$.

במרחבים כלליים, אין קשר הכרחי בין הדברים; תראו זאת בקורס בטופולוגיה.

תרגיל:

תהיינה $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ קבוצות קומפקטיות במרחב $\mathbb{R}^m$. האם הקבוצות הבאות קומפקטיות?

1. $A_1 \cup A_2$.
2. $A_1 \cap A_2$.
3. $A_1 \backslash A_2$.
4. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

פתרון

הקבוצות שלנו קומפקטיות ולכן כולן סגורות וחסומות.

1. כן. איחוד סופי של סגורות הוא קבוצה סגורה, ואיחוד סופי של קבוצות חסומות הוא קבוצה חסומה; אם $B(0,r_1) \supseteq A_1, B(0,r_2) \supseteq A_2$ אז $A_1 \cup A_2 \subseteq B(0, r_1+r_2)$.

2. כן. באופן דומה לאיחוד.

3. לא בהכרח. נתבונן למשל בקבוצות: $A_1 = [0,2], A_2 = [0,1]$. הן סגורות וחסומות ולכן, לפי היינה־בורל, קומפקטיות. עם זאת, הקבוצה $A_1 \backslash A_2 = [0,1)$ אינה סגורה ולכן אינה קומפקטית.

4. לא בהכרח. נתבונן למשל בקבוצות $A_n = \{n\}$. הן סגורות וחסומות ולכן (לפי היינה־בורל) קומפקטיות, אך $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$ לא חסומה ולכן לא קומפקטית.

משפט 2.12 תהי A קבוצה קומפקטית ותהי $B \subseteq A$ סגורה. אזי B קומפקטית.

2.6 פנים וסגור

הגדרה 2.13 יהי X מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$.

1. **הסגור** של A מוגדר על ידי:

$$cl(A) = \bigcap_{A \subseteq S} S$$

כאשר S קבוצה סגורה.

2. **הפנים** של A מוגדר על ידי:

$$int\left(A\right)=\bigcup_{A\subseteq V}V$$

כאשר V קבוצה פתוחה.

הסגור הוא חיתוך של קבוצות סגורות ולכן הוא קבוצה סגורה.

הסגור הוא הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את הקבוצה.

באופן דומה, הפנים הוא איחוד של קבוצות פתוחות ולכן הוא קבוצה פתוחה.

הפנים הוא הקבוצה הפתוחה המקסימלית המוכלת בקבוצה.

אם כך, מתקיים:

$$cl\left(cl\left(A\right)\right)=cl\left(A\right),int\left(int\left(A\right)\right)=int\left(A\right)$$

לכל A.

משפט 2.14 נסמן ב$-A'$ את אוסף נקודות ההצטברות של A. אזי:

$$cl\left(A\right)=A\cup A'$$

<u>תרגיל:</u>

יהי X מרחב מטרי ותהי $A\subseteq X$. אזי, $cl\left(A\right)=\left(int\left(A^{c}\right)\right)^{c}$.

<u>פתרון:</u>

ממש מההגדרה,

$$cl\left(A\right)=\bigcap_{A\subseteq S}S=\left(\bigcup_{S^{c}\subseteq A^{c}}S^{c}\right)^{c}=\left(int\left(A^{c}\right)\right)^{c}$$

במעבר השני השתמשנו בדה־מורגן. מכיוון ש$-S$ סגורה, S^{c} פתוחה; מכיוון ש$-A\subseteq S$ אז $A^{c}\supseteq S^{c}$.

מסקנה 2.15 מהתרגיל, נקבל:

1. $(int\left(A\right))^{c}=cl\left(A^{c}\right)$.
2. $int\left(A^{c}\right)=\left(cl\left(A\right)\right)^{c}$.

הגדרה 2.16 יהי X מרחב מטרי ותהי $A\subseteq X$ קבוצה. **השפה** של A מוגדרת על ידי:

$$\partial A=cl\left(A\right)\setminus int\left(A\right)$$

אינטואיטיבית, השפה היא כל הנקודות שנמצאות ב"קצוות" הקבוצה.

2.7 קשירות וקשירות מסילתית

הגדרה 2.17 יהי X מרחב מטרי, ותהי $A\subseteq X$ קבוצה. נאמר ש$-A$ **קשירה**, אם היא לא מוכלת באיחוד $U\cup V$ כאשר U,V פתוחות וזרות עבורן: $A\cap U\neq\emptyset,B\cap V\neq\emptyset$.

אינטואיטיבית, אי־אפשר לפרק את הקבוצה לשתי קבוצות פתוחות.

<u>לדוגמה:</u>

ב$-\mathbb{R}^{n}$, כדורים פתוחים, כדורים סגורים וקוביות הם קבוצות קשירות.

<u>תרגיל:</u>

יהי X מרחב מטרי ותהיינה A,B קשירות. האם הקבוצות הבאות קשירות?

1. $A\cup B$.
2. $A\cap B$.
3. $A\backslash B$.

<u>פתרון:</u>

1. לא בהכרח. נתבונן בקבוצות $A=\left(0,2\right),B=\left(3,4\right)$ ב$-\mathbb{R}$. הקבוצות קשירות (אלו כדורים פתוחים) אך האיחוד שלהן לא קבוצה קשירה; (הקבוצות $A=U,B=V$ מכסות אותו).
2. לא בהכרח. נתבונן בקבוצות:

$$A=\left\{(x,y)|0\leq y\leq 1,0\leq x\leq 3\right\}\cup\left\{(x,y)|0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 3\right\}$$

$$B=\{(x,y)|2\leq y\leq 3,0\leq x\leq 3\}\cup\{(x,y)|2\leq x\leq 3,0\leq y\leq 3\}$$

ב$-\mathbb{R}^2$. כל אחת מהן קשירה, אך החיתוך אינו קבוצה קשירה.

3. לא בהכרח. נתבונן בקבוצות $A=(0,3)\,,B=(1,2)$ ב$-\mathbb{R}$. הקבוצות קשירות אך ההפרש אינו קבוצה קשירה.

משפט 2.18 יהי X מרחב מטרי ותהיינה $A,B\subseteq X$ קשירות. נניח ש$-A\cap B\neq\emptyset$, אזי $A\cup B$ קשירה.

הגדרה 2.19 יהי X מרחב מטרי ותהי $A\subseteq X$. נאמר שהקבוצה A **קשירה מסילתית**, אם לכל $a,b\in A$ קיימת פונקציה רציפה $\gamma:[0,1]\to A$ עבורה $\gamma\left(0\right)=a,\gamma\left(1\right)=b$. פונקציה כזו מכונה **מסילה**.

אינטואיטיבית, קבוצה היא קשירה מסילתית אם אפשר בין כל שתי נקודות בקבוצה לצייר קו (לאו דווקא ישר) שנמצא כולו בקבוצה.

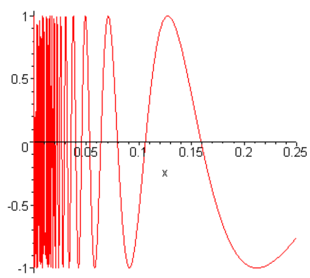
משפט 2.20 יהי X מרחב מטרי ותהי $A\subseteq X$. אם A קשירה מסילתית אז A קשירה.

ההיפך לא נכון!

דוגמה מפורסמת היא "עקומת הסינוס של הטופולוגים" (חפשו בגוגל), הקבוצה:

$$\left\{\left(x,\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right):x>0\right\}\cup\left(\{0\}\times[-1,1]\right)$$

כלומר הצד החיובי של גרף הפונקציה $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ והחלק בין 1- ו־1 על ציר ה$-y$.



משפט 2.21 יהי X מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$ פתוחה. אזי, A קשירה מסילתית אם"ם A קשירה.

2.8 סדרות קושי וסדרות מתכנסות

הגדרה 2.22 יהי (X,d) מרחב מטרי.

1. נאמר שסדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ **מתכנסת** ל־x אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n_0 < n$ מתקיים:

$$d\left(x_n, x\right) < \varepsilon$$

כלומר, $x_n \in B\left(x, \varepsilon\right)$. x נקראת **נקודת גבול.** אכן, כמו שהזכרנו, במרחבים מטריים נקודת גבול היא נקודת הצטברות ולהיפך.

2. נאמר שסדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ היא **סדרת קושי** אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n, m > n_0$,

$$d\left(x_n, x_m\right) < \varepsilon$$

אינטואיטיבית, האיברים מצטופפים יותר ויותר ככל שמתקדמים במעלה הסדרה.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו כי הסדרה $a_n = (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n})$ היא סדרת קושי.

<u>פתרון:</u>

יהיו m, n. נחשב:

$$||a_n - a_m|| = \sqrt{2} \cdot (\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m}) < \sqrt{2} \cdot (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m})$$

יהי $\varepsilon > 0$, צ"ל: $||a_n - a_m|| < \varepsilon$. אנו רוצים למצוא את n_0 המתאים.

מספיק להבטיח שמתקיים:

$$\sqrt{2} \cdot (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m}) < \varepsilon$$

ומספיק שיתקיים: $\sqrt{2}\frac{1}{2^n}, \sqrt{2}\frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$, ולכן נדרוש:

$$m, n > log_2(\frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon})$$

ואם נבחר: $n_0 = max\{1, log_2(\frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon})\}$ נקבל את הדרוש.

משפט 2.23 כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי.

לדוגמה:

ההיפך לאו דווקא נכון.

אפשר לבחור סדרה שאנו יודעים שהיא "מתכנסת", ולכן גם סדרת קושי לפי המשפט, אך "מתכנסת" לאיבר שאינו נמצא במרחב ולכן כלל לא מתכנסת.

כך, האיברים אכן מצטופפים כמו בסדרת קושי אך לא תהיה התכנסות.

למשל, $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ במרחב $(0,1]$. זוהי סדרת קושי (כי היא "מתכנסת" ל־0) אך אבוי! היא אינה מתכנסת במרחב שלנו.

הגדרה 2.24 מרחב מטרי נקרא **שלם** אם כל סדרת קושי היא סדרה מתכנסת.

מרחב נורמי נקרא **מרחב בנך** אם הוא שלם לפי המטריקה המושרית מהנורמה.

מרחב מכפלה פנימית נקרא **מרחב הילברט** אם הוא שלם לפי המטריקה המושרית מהמכפלה הפנימית.

לדוגמה:

1. המרחבים $\mathbb{R}^k$ הם שלמים.

2. כל מרחב מטרי קומפקטי הוא שלם.

3. כל תת־קבוצה סגורה של מרחב שלם היא מרחב שלם.

סדרות קושי אמנם לא בהכרח מתכנסות, אך הן "דומות" לסדרות מתכנסות ומקיימות מספר תכונות נאות. בתרגיל הבא (ובתרגילים הנוספים) נוכיח כמה מהן.

<u>תרגיל:</u>

יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ סדרת קושי. הראו שהיא חסומה.

<u>פתרון:</u>

מכיוון שזו סדרת קושי, קיים n_1 עבורו לכל $m,n > n_1$, $d\left(x_n, x_m\right) < 1$.

נגדיר:

$$r = 1 + \max_{1\leq n,m\leq n_1+1} d\left(x_n, x_m\right)$$

r אכן מוגדר מכיוון שהמקסימום הוא על קבוצה סופית.

מהגדרת r נקבל שלכל n,m, $d\left(x_n, x_m\right) < r$, ובפרט עבור m מסוים נקבל שלכל n,

$$d\left(x_n, x_m\right) < r \Longrightarrow x_n \in B\left(x_m, r\right)$$

ולכן הסדרה חסומה.

תרגילים נוספים

1. הוכיחו שהפונקציות הבאות הן מטריקות על המרחבים הנתונים:

   (א) ב־$\mathbb{R}^+$, $d(x,y) = \left|\ln\frac{y}{x}\right|$.

   (ב) במרחב נורמי V, $d(x,y) = \|x\| + \|y\|$ כאשר $x \neq y$, ו־$d(x,y) = 0$ כאשר $x = y$.

   (ג) בקבוצה X, $d(x,y) = 1$ כאשר $x \neq y$ ו־$d(x,y) = 0$ כאשר $x = y$.

   (ד) במרחב מטריצות $M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$, $d\left(X,Y\right) = rank\left(X-Y\right)$.

2. נסמן ב־A' את אוסף נקודות ההצטברות של A. יהי $X = \mathbb{R}$. תהי $A = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. מהן A', A''?

3. האם הקבוצות הבאות פתוחות? סגורות?

(א) $A=\{(x,y)\,|y=0,x\in(0,1)\}$ ב־$\mathbb{R}^2$.

(ב) $B=\{(x,y)\,|x=y\}$ ב־$\mathbb{R}^2$.

(ג) $C=\{(x,y)\,|x>0,y<0,x+y>-1\}$ ב־$\mathbb{R}^2$.

4. האם הקבוצות הבאות פתוחות ב־$\mathbb{R}^2$? סגורות? מצאו את קבוצת נקודות הגבול.

(א) $A=\{(0,1),(0,0)\}$.

(ב) $B=\left\{(x,y)\,|x^2+y^2<1\right\}\cup\{(0,1)\}$.

(ג) $C=\{(x,y)\,|x>0,y<0\}$.

5. בכל אחד מהסעיפים הבאים, תנו דוגמה למרחב מטרי וקבוצות מתאימות.

(א) איחוד של קבוצות סגורות שאינו קבוצה סגורה.

(ב) חיתוך של קבוצות פתוחות שאינו קבוצה פתוחה.

(ג) קבוצה סגורה וחסומה שאינה קומפקטית.

6. תהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה חסומה ב־$\mathbb{R}^n$. נניח שהסדרה $\{d_2(x_n,0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (המטריקה האוקלידית) עולה ממש. האם $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת?

7. תהי $X\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית, ויהי $\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף של קבוצות סגורות שאיחודן הוא X. נניח שלכל אוסף סופי $\{A_{i_k}\}_{k=1}^m$ מתקיים: $\bigcap_{k=1}^m A_{i_k}\neq\emptyset$. הוכיחו:

$$\bigcap_{i\in I}A_i\neq\emptyset$$

8. יהי X מרחב מטרי, ותהיינה $A,B\subseteq X$. הוכיחו או הפריכו:

(א) $cl(A\cap B)\subseteq cl(A)\cap cl(B)$.

(ב) $cl(A\cap B)\supseteq cl(A)\cap cl(B)$.

(ג) $int(A\cup B)\subseteq int(A)\cup int(B)$.

(ד) $int(A\cup B)\supseteq int(A)\cup int(B)$.

9. יהי X מרחב מטרי. יהי $a \in X$ ויהי $r > 0$.

(א) הוכיחו שאם X מרחב נורמי, אזי $cl\left(B\left(a,r\right)\right) = B\left[a,r\right]$.

(ב) מצאו דוגמה נגדית למקרה בו X אינו מרחב נורמי.

10. יהי X מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$. האם $cl\left(int\left(A\right)\right) = cl\left(A\right)$?

11. יהי X מרחב מטרי. ותהיינה $A, B \subseteq X$ קבוצות קשירות.

(א) האם $int\left(A\right)$ קשירה?

(ב) נניח ש־$A \cap B \neq \emptyset$. האם $int\left(A \cup B\right)$ קשירה?

12. הוכיחו או הפריכו: אם $A \subseteq \mathbb{R}^2$ בת מניה, אז $\mathbb{R}^2 \backslash A$ קשירה מסילתית.

13. תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. נסמן את קבוצות נקודות הגבול שלהן ב־$\lim A, \lim B$ בהתאמה.
הוכיחו או הפריכו:

(א) $\lim A \cap \lim B = \lim\left(A \cap B\right)$.

(ב) $\lim A \cup \lim B = \lim\left(A \cup B\right)$.

(ג) $\lim A \times \lim B = \lim\left(A \times B\right)$.

(ד) $\lim A \backslash \lim B = \lim\left(A \backslash B\right)$.

14. הוכיחו שהמרחבים הבאים הם שלמים:

(א) $C\left[a,b\right]$ עם הנורמה $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} \left|f\left(x\right)\right|$.

(ב) $l_2 = \left\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \middle| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\right\}$ עם הנורמה $\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$.

15. תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$סדרת קושי.

(א) הראו שאם לסדרה יש גבול חלקי (גבול של תת־סדרה), זהו הגבול של הסדרה.

(ב) הסיקו שמרחב מטרי קומפקטי הוא מרחב שלם.

16. יהי (X,d) מרחב מטרי. נגדיר את **הקוטר** של תת־קבוצה $A \subseteq X$ על ידי:

$$\delta(A) = \sup\{d(x,y) \,|\, x,y \in A\}$$

הוכיחו שמרחב מטרי הוא שלם אם ורק אם לכל סדרה יורדת של קבוצות סגורות $X \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq \cdots$ המקיימת $\delta(F_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ מתקיים $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

פתרונות

1. בכל אחד מהסעיפים נראה שתכונות המטריקה מתקיימות.

(א) $d(x,y) = \left|\ln \frac{y}{x}\right|$.

i. אי־שליליות: מכיוון שזהו ערך מוחלט, $d(x,y) \geq 0$. כמו כן:

$$x = y \iff \frac{y}{x} = 1 \iff \left|\ln \frac{y}{x}\right| = 0 \iff d(x,y) = 0.$$

ii. סימטריות: נשתמש בחוקי הלוגריתם:

$$d(x,y) = \left|\ln \frac{y}{x}\right| = \left|\ln \left(\frac{x}{y}\right)^{-1}\right| = \left|(-1)\cdot \ln \frac{x}{y}\right| = \left|\ln \frac{x}{y}\right| = d(y,x).$$

iii. אי־שוויון המשולש: שוב, נשתמש בחוקי הלוגריתם:

$$d(x,z) = \left|\ln \frac{z}{x}\right| = \left|\ln \frac{\frac{z}{y}}{\frac{x}{y}}\right| = \left|\ln \frac{z}{y} - \ln \frac{x}{y}\right| = \left|\ln \frac{y}{x} + \ln \frac{z}{y}\right|$$

בעזרת אי־שוויון המשולש של ערך מוחלט:

$$\left|\ln \frac{y}{x} + \ln \frac{z}{y}\right| \leq \left|\ln \frac{z}{y}\right| + \left|\ln \frac{y}{x}\right| = d(x,y) + d(y,z)$$

(ב) $d(x,y) = \begin{cases} \|x\| + \|y\| & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$.

i. אי־שליליות: נובעת מאי־השליליות של הנורמה.

ii. סימטריות: נובעת מהחילופיות של החיבור.

iii. אי־שוויון המשולש: נובע גם הוא מתכונות הנורמה:

$$d(x,z) = \|x\| + \|z\| \leq \|x\| + 2\|y\| + \|z\| = d(x,y) + d(y,z)$$

(ג) $d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$.

i. אי־שליליות: ישירות מהגדרת המטריקה.

ii. סימטריות: כנ"ל.

iii. אי־שוויון המשולש: גם הוא מיידי.

(ד) $d(X,Y) = rank\left(Y-X\right)$.

i. אי־שליליות: לכל מטריצה A, $rank\left(A\right) \geq 0$. כמו כן:

$$d\left(X-Y\right)=0 \iff rank\left(Y-X\right)=0 \iff Y-X=0 \iff X=Y$$

שימו לב שמדובר על אפסים שונים, פעם סקלר ממשי ופעם מטריצת האפס.

ii. סימטריות:

$$d(X,Y)=rank\left(Y-X\right)=rank\left(\left(-1\right)\cdot\left(X-Y\right)\right)=rank\left(X-Y\right)=d\left(Y,X\right)$$

מכיוון שכפל בסקלר שונה מאפס לא משנה את דרגתה של המטריצה.

iii. אי־שוויון המשולש:

$$d\left(X,Z\right)=rank\left(Z-X\right)=rank\left(\left(X-Y\right)+\left(Y-Z\right)\right)\leq$$

מטענה שראיתם בוודאי באלגברה ליניארית:

$$\leq rank\left(Y-X\right)+rank\left(Z-Y\right)=d\left(X,Y\right)+d\left(Y,Z\right)$$

2. $0\in A'$ כי $lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

מצד שני, אם ניקח סדרה $\left\{x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ אפשר לסדר אותה כתת סדרה של $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ולכן נקודת הגבול היחידה היא 0 וסה"כ $A'=\left\{0\right\}$.

לכן, $A''=\phi$.

אפשר כמובן להסתכל על נקודת ההצטברות לפי ההגדרה, ולראות שלמעט 0 את כל הנקודות בקבוצה אפשר להקיף בכדור מספיק קטן שאין לו חיתוך עם הקבוצה (למעט המרכז כמובן).

3. נבדוק האם הקבוצות פתוחות או סגורות:

(א) הקבוצה אינה פתוחה, מכיוון שעבור $\left(\frac{1}{2},0\right)\in A$, לכל $r>0$ מתקיים:

$$B\left(\left(\frac{1}{2},0\right),r\right)\nsubseteq A$$

.

הקבוצה אינה סגורה, כי המשלים אינו קבוצה פתוחה; לכל $r > 0$, מתקיים $B\left(\left(1,0\right),r\right) \nsubseteq A^{c}$.

(ב) הקבוצה אינה פתוחה, כי עבור $\left(1,1\right) \in B$, לכל $r > 0$ מתקיים

$$B\left(\left(1,1\right),r\right) \subsetneq B$$

.

הקבוצה סגורה, מכיוון שהמשלים פתוחה; לכל נקודה $\left(x,y\right) \in B^{c}$ נסמן את מרחקה מהישר $y = x$ ב-D ואז $B\left(\left(x,y\right),\frac{D}{2}\right) \subseteq B^{c}$.

(ג) הקבוצה פתוחה; לכל $\left(x,y\right) \in C$ נסמן את מרחקה מהישר $x + y + 1 = 0$ ב-D, ונסמן: $r = \frac{1}{2}\min\left\{\left|x\right|,\left|y\right|,D\right\}$ ונקבל ש: $B\left(\left(x,y\right),r\right) \subseteq C$.

הקבוצה לא סגורה, כי המשלים אינה פתוחה; עבור $\left(0,0\right) \in C^{c}$, לכל $r > 0$ $B\left(\left(0,0\right),r\right) \subsetneq C^{c}$ ולכן אינה פתוחה.

4. נבדוק האם הקבוצות פתוחות או סגורות:

(א) הקבוצה לא פתוחה; לכל $r > 0$, $B\left(\left(0,0\right),r\right) \subsetneq A$.

הקבוצה סגורה; כל נקודון הוא סגור ואיחוד סופי של סגורות הוא סגור.

האופציות היחידות לנקודות גבול הן $\left(0,1\right),\left(0,0\right)$ כי A סגורה, אך $B\left(\left(0,1\right),\frac{1}{2}\right),B\left(\left(0,0\right),\frac{1}{2}\right)$ זרים ל-A (למעט מרכזיהם) ולכן אלו לא נקודות גבול.

לכן לקבוצה אין נקודות גבול.

(ב) הקבוצה לא פתוחה; לכל $r > 0$, $B\left(\left(0,1\right),r\right) \nsubseteq B$.

הקבוצה לא סגורה, מכיוון שמשלימתה אינה פתוחה; $\left(1,0\right) \in B^{c}$ אך לכל $r > 0$, $B\left(\left(1,0\right),r\right) \nsubseteq B^{c}$.

הקבוצה $\left\{\left(x,y\right)\left|x^{2}+y^{2} < 1\right.\right\}$ היא כדור פתוח, לכן פתוחה ולכן כל הנקודות בה הן נקודות גבול.

גם נקודות הקבוצה $\left\{\left(x,y\right)\left|x^{2}+y^{2} = 1\right.\right\}$ הן נקודות גבול, כי לכל $\left(x,y\right) \in \left\{\left(x,y\right)\left|x^{2}+y^{2} = 1\right.\right\}$ ולכל $r > 0$ אפשר לקחת $r' = \min\left\{1,r\right\}$ ואז:

$$\left(\left(1-\frac{r'}{2}\right)x,\left(1-\frac{r'}{2}\right)y\right) \in B \cap B\left(\left(x,y\right),r\right)$$

כל נקודה (x,y) אחרת אינה נקודת גבול (נסמן את מרחקה מהמעגל $\left\{(x,y)\,|x^2+y^2=1\right\}$ ב$-D$ ואז הכדור $B\left((x,y),\frac{D}{2}\right)$ זר ל$-B$), ולכן קבוצת נקודות הגבול היא

$$\left\{(x,y)\,|x^2+y^2\leq 1\right\}$$

(ג) הקבוצה פתוחה; לכל $(x,y)\in C$ נסמן: $r=\frac{1}{2}\min\{|x|,|y|\}$ ואז: $B((x,y),r)\subseteq C$, כי אם $(a,b)\in B((x,y),r)$ אז:

$$|a-x|<\sqrt{|x-a|^{\,2}+|y-b|^{\,2}}<r\leq\frac{1}{2}|x|$$

ולכן:

$$a>|x|-\frac{1}{2}|x|>0$$

באופן דומה, $|b-y|<\frac{1}{2}|y|$ ולכן:

$$b<y+\left|\frac{1}{2}y\right|=-|y|+\frac{1}{2}|y|<0$$

וסה"כ: $(a,b)\in C$.

הקבוצה לא סגורה, כי משלימתה אינה פתוחה; $(0,0)\in C^c$ אך לכל $r>0$, $B((0,0),r)\nsubseteq C$.

הקבוצה פתוחה, ולכן כל $(x,y)\in C$ היא נקודת גבול.

יתר על כן, גם הנקודות: $\{(x,y)\,|y=0,x\geq 0\}\cup\{(x,y)\,|x=0,y\leq 0\}$ הן נקודות גבול, כי לכל (x,y)כזו ולכל $r>0$,

$$\left(x+\frac{r}{2},y-\frac{r}{2}\right)\in B((x,y),r)\cap C$$

נקודות אחרות אינן נקודות גבול (קל לראות) ולכן בסה"כ נקודות הגבול הן $\{(x,y)\,|x\geq 0,y\geq 0\}$.

5. ניתן דוגמה בכל אחד מהסעיפים כמבוקש.

(א) נתבונן באוסף הנקודונים $\left\{\frac{1}{n}\right\}\subseteq\mathbb{R}$ כאשר $n\in\mathbb{N}$. כמו שראינו, כל נקודון ב$-\mathbb{R}$ הוא קבוצה סגורה (כל נקודון הוא קבוצה סגורה בכל מרחב מטרי), אך

האיחוד: $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ אינו קבוצה סגורה, מכיוון ש-0 הוא נקודת הצטברות של הקבוצה אך לא שייך אליה.

(ב) נתבונן באוסף הקטעים הפתוחים $\left(1-\frac{1}{2n},1+\frac{1}{2n}\right)\subseteq\mathbb{R}$, כאשר $n\in\mathbb{N}$. כל קטע פתוח הוא קבוצה פתוחה, אך החיתוך הוא:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{1}{2n},1+\frac{1}{2n}\right)=\{1\}$$

נקודון וכמו שראינו נקודון ב$-\mathbb{R}$ אינו קבוצה פתוחה.

(ג) לפי היינה־בורל, נחפש מרחב שאינו מהצורה $\mathbb{R}^n$.

אם כך, נבחר את הקבוצה $\mathbb{Z}$ עם המטריקה הדיסקרטית, ונתבונן בקבוצה $\mathbb{Z}$ כולה.

הקבוצה $\mathbb{Z}$ סגורה כי היא כל המרחב.

הקבוצה $\mathbb{Z}$ חסומה; מהגדרת המטריקה הדיסקרטית, $\mathbb{Z}\subseteq B\left(0,2\right)$.

עם זאת, הקבוצה $\mathbb{Z}$ אינה קומפקטית, מכיוון שלכיסוי הפתוח $\{\{a\}:a\in\mathbb{Z}\}$ שלה אין תת־כיסוי סופי. זהו אכן כיסוי פתוח, מכיוון שבמטריקה הדיסקרטית כל קבוצה (ובפרט הנקודונים) היא פתוחה.

6. לאו דווקא. נתבונן בסדרה $x_n=(-1)^n(1-\frac{1}{n})$ ב$-\mathbb{R}$. $|x_n|<1$ ולכן חסומה.

$$d_2(x_n,0)=|x_n|=1-\frac{1}{n}$$

עולה ממש, אך הסדרה לא מתכנסת.

7. נניח בשלילה שהחיתוך אינו ריק. לכן:

$$\mathbb{R}^n=\emptyset^c=\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)^c=\bigcup_{i\in I}A_i^c$$

לפי דה־מורגן, ולכן $X\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i^c$. X קומפקטי, והקבוצות A_i^c פתוחות (כי המשלימות שלהן סגורות) ולכן קיים תת־כיסוי סופי של X:

$$X\subseteq\bigcup_{k=1}^{s}A_{i_k}^c$$

מצד שני, $\emptyset \neq \bigcap A_{i_k} \supseteq X$ כי החיתוך סופי, כלומר קיים $x \in \bigcap A_{i_k}$ אלא שאז $x \in X$ ולכן גם:

$$x \in \bigcup A_{i_k}^c = \left(\bigcap A_{i_k}\right)^c$$

וסתירה! לכן החיתוך אינו ריק.

8. נשתמש בכך שסגור היא הסגורה המינימלית שמכילה והפנים היא הפתוחה המקסימלית שמוכלת.

(א) נוכיח. $A \cap B \subseteq A \subseteq cl\left(A\right), A \cap B \subseteq B \subseteq cl\left(B\right)$ ולכן:

$$A \cap B \subseteq cl\left(A\right) \cap cl\left(B\right)$$

מכיוון שהקבוצות $cl\left(A\right), cl\left(B\right)$ סגורות, גם $cl\left(A\right) \cap cl\left(B\right)$ סגורה, ומכיוון שהיא מכילה את $A \cap B$ והסגור היא הסגורה המינימלית שמכילה, נקבל שאכן:

$$cl\left(A \cap B\right) \subseteq cl\left(A\right) \cap cl\left(B\right)$$

(ב) נפריך. נתבונן בקבוצות: $A = \left(0,1\right), B = \left(1,3\right)$ ב־$\mathbb{R}$. מכיוון שהחיתוך ריק, גם $cl\left(A \cap B\right) = \emptyset$. מאידך גיסא,

$$cl\left(A\right) = \left[0,1\right], cl\left(B\right) = \left[1,3\right] \Longrightarrow cl\left(A\right) \cap cl\left(B\right) = \left\{1\right\}$$

ולכן $cl\left(A\right) \cap cl\left(B\right) \nsubseteq cl\left(A \cap B\right)$.

(ג) נפריך. נתבונן בקבוצות: $A = \left[0,1\right], B = \left[1,3\right]$ ב־$\mathbb{R}$. מצד אחד,

$$int\left(A\right) = \left(0,1\right), int\left(B\right) = \left(1,3\right) \Longrightarrow int\left(A\right) \cup int\left(B\right) = \left(0,3\right) \setminus \left\{1\right\}$$

ומצד שני:

$$A \cup B = \left[0,3\right] \Longrightarrow int\left(A \cup B\right) = \left(0,3\right)$$

ולכן $int\left(A \cup B\right) \nsubseteq int\left(A\right) \cup int\left(B\right)$.

(ד) נוכיח. $int\left(A\right)\subseteq A\subseteq A\cup B, int\left(B\right)\subseteq B\subseteq A\cup B$ ולכן:

$$int\left(A\right)\cup int\left(B\right)\subseteq A\cup B$$

מכיוון שהקבוצות $int\left(A\right), int\left(B\right)$ פתוחות גם $int\left(A\right)\cup int\left(B\right)$ פתוחה ומכיוון שהיא מוכלת ב-$A\cup B$ והפנים הוא הפתוחה המקסימלית שמוכלת, נקבל:

$$int\left(A\cup B\right)\supseteq int\left(A\right)\cup int\left(B\right)$$

9. שוב, נשתמש בכך שהסגור הוא הסגורה המינימלית שמוכלת.

(א) נשתמש בהכלה דו־כיוונית. מתקיים: $B\left(a,r\right)\subseteq B\left[a,r\right]$. הכדור הסגור הוא קבוצה סגורה ומכיוון שסגור היא הסגורה המינימלית שמכילה,

$$cl\left(B\left(a,r\right)\right)\subseteq B\left[a,r\right]$$

הכיוון הזה נכון בכל מרחב מטרי.

תהי $x\in B\left[a,r\right]$. נראה שהיא נקודת הצטברות של $B\left(a,r\right)$ ואז לפי משפט $x\in cl\left(B\left(a,r\right)\right)$.

מה בין מרחב נורמי למרחב מטרי כללי? אחת נתכונות הנורמה היא הומוגניות, קרי אפשר "לשלוף" סקלר מתוך הנורמה, וכך בעצם להגדיר סדרה עם אינסוף איברים שונים (שמתאימים לאינסוף סקלרים שונים).

אם כן, $\|x-a\|\leq r$. נתבונן באיברים מהצורה:

$$x_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)x+\frac{a}{n}$$

לכל $n\in\mathbb{N}$, $n>1$. מתקיים: $\|x_n-x\|=\frac{1}{n}\|x-a\|\leq\frac{r}{n}<r$ ולכן $x_n\in B\left(0,1\right)$.

לכל r_0 קיים n עבורו $\frac{r}{n}\leq r_0$ ולכן לכל r_0 קיים $x_n\in B\left(x,r_0\right)$ ולכן x נקודת הצטברות של $B\left(a,r\right)$.

לכן $x \in cl(B(a,r))$ ולכן $cl(B(a,r)) \supseteq B[a,r]$ ובסך הכל הוכחנו את הדרוש.

(ב) נבחר $X = \{a,b\}$ קבוצה עם שני איברים שונים ועם המטריקה הדיסקרטית: $d(a,b) = 1$.

מתקיים: $B(a,1) = \{a\}$. זו קבוצה סגורה (כמו כל קבוצה במרחב דיסקרטי) ולכן $cl(B(a,1)) = \{a\}$.

מצד שני, $B[a,1] = X$.

10. לא. נתבונן בקבוצה $\mathbb{Q}$ ב־$\mathbb{R}$. מצד אחד $cl(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ (חשבו מהן נקודות ההצטברות של $\mathbb{Q}$) ומצד שני:

$$cl(int(\mathbb{Q})) = cl(\emptyset) = \emptyset$$

11. נתון ש־A, B קשירות.

(א) לא בהכרח. נתבונן בזוג הכדורים הסגורים ב־$\mathbb{R}^2$:

$$A = B[0,1], B = B[2,1]$$

ובאיחוד שלהם $A \cup B$. החיתוך של הכדורים לא ריק ולכן (ממשפט) גם האיחוד קשיר.

עם זאת, הפנים של האיחוד הוא הקבוצה:

$$int(A \cup B) = B(0,1) \cup B(2,1)$$

וזו אינה קבוצה קשירה.

(ב) אותה דוגמה כמו בסעיף הקודם תעבוד גם כאן.

12. נוכיח זאת. יהיו $x, y \in \mathbb{R}^2 \backslash A$ ונראה שיש ביניהן מסילה, פונקציה רציפה כנדרש.

אם $x = y$, קיימת ביניהן מסילה - פונקציה קבועה.

אם $x \neq y$, מכיוון שעוצמת כל הישרים העוברים דרך x היא א, קיים ישר l_x שעובר

דרך x ולא עובר באף נקודה מ-A (זכרו שכל ישר נקבע על ידי שתי נקודות בצורה יחידה).

באופן דומה, קיים ישר l_y העובר דרך y ולא עובר באף נקודה מ-A, ובנוסף שיפועו שונה משיפועו של l_x.

לכן, l_x, l_y נחתכים בנקודה שנסמנה ב-z. המסילה שלנו תהיה הקטע מ-x עד לנקודת החיתוך והקטע מנקודת החיתוך עד ל-y.

ביתר פירוט, המסילה היא הפונקציה γ המעתיקה את הקטע $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ לקטע שבין x לבין z, ואת הקטע $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ לקטע שבין z לבין y.

13. נזכור ש-$x \in \lim A$ אם לכל $r > 0$ קיים $a \in A$ שונה מ-x כך ש-$a \in B(x, r)$.

(א) נפריד:

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) | n \in \mathbb{N} \right\}, B = \left\{ \left(-\frac{1}{n}, 0 \right) | n \in \mathbb{N} \right\}$$

ואז $\lim A = \lim B = \{(0,0)\}$ ולכן $\lim(A) \cap \lim B = \{(0,0)\}$.

מצד שני, $A \cap B = \emptyset$ ולכן $\lim(A \cap B) = \emptyset$.

(ב) נוכיח.

יהי $x \in \lim A \cup \lim B$. בה"כ, $x \in \lim A$.

לכן, לכל $r > 0$ קיים $a \in A \subseteq A \cup B$ שונה מ-x כך ש-$a \in B(x, r)$, ולכן $x \in \lim(A \cup B)$.

לצד שני, יהי $x \in \lim(A \cup B)$. נניח בשלילה ש-$x \notin \lim A, \lim B$.

לכן, קיימים $0 < r_A, r_B$ כך שלכל $a \in A$ ולכל $b \in B$ שונים מ-x מתקיים:

$$a \notin B(x, r_A), b \notin B(x, r_B)$$

נסמן $r = \min\{r_A, r_B\}$. מכיוון ש-$x \in \lim(A \cup B)$, קיים $a \in A \cup B$ שונה מ-x כך ש-$c \in B(x, r)$.

בה"כ, $c \in A$ ואז $c \in B(x, r) \subseteq B(x, r_A)$ וסתירה! לכן $x \in \lim A \cup \lim B$.

בעזרת הכלה דו-כיוונית הוכחנו את הדרוש.

(ג) נפריד:

$$A=\left\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\right\},B=[0,1]$$

ואז $\lim A\times\lim B=\{0\}\times[0,1]$ אך $\lim(A\times B)=((A\cup\{0\})\times B)$.

(ד) נפריד:

$$B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2<6\right\},A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leq 6\right\}$$

ואז $\lim(A\backslash B)=A\backslash B$ אך $\lim A\backslash\lim B=\emptyset$.

14. נראה שסדרת קושי היא סדרה מתכנסת.

(א) תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי במרחב.

לכן, לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $m,n>n_0$ מתקיים:

$$\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

לכן, לכל $x_0\in[a,b]$ מתקיים: $|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\varepsilon$. אי לכך, הסדרה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי ב$-\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ מרחב שלם ולכן הסדרה מתכנסת. נסמן את גבול הסדרה ב$-f(x_0)$.

סדרת הפונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל$-f$. נראה שזו התכנסות בנורמה.

לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $m,n>n_0$ מתקיים:

$$\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

וגם קיים $n_{x_0}>n_0$ עבורו $\left|f_{n_{x_0}}(x_0)-f(x_0)\right|<\varepsilon$. בפרט:

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|\leq\left|f_n(x_0)-f_{n_{x_0}}(x_0)\right|+\left|f_{n_{x_0}}(x_0)-f(x_0)\right|<2\varepsilon$$

ובפרט $\|f_n-f\|=\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|<2\varepsilon$ לכל $n>n_0$ ולכן הסדרה אכן מתכנסת.

(ב) סדרה במרחב זה היא סדרה של סדרות, ולכן יש לנו שני אינדקסים. נסמן אחד למעלה ואחד למטה, ולא נתבלבל עם מעריך של חזקה.

תהי $\{(x_m^n)_m\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי. לכן, לכל m קבוע הסדרה $\{x_m^n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי ב־$\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ מרחב שלם ולכן הסדרה מתכנסת. נסמן את גבול הסדרה ב־x_m.

נתבונן בסדרה $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$. ואז:

$$\sum |x_m|^2 = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum |x_m^n|^2 \leq \sup \|\{x_m^n\}_m\|_2^2 < M < \infty$$

עבור $M > 0$ כלשהו, מכיוון שסדרת קושי היא סדרה חסומה.

מכאן, $\sum |x_m|^2 < \infty$ ולכן $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \in l_2$.

לפי ההגדרה:

$$\left\| \{x_m^l\}_{n=1}^{\infty} - \{x_m^n\}_{n=1}^{\infty} \right\|_2 = \sqrt{\sum |x_m^l|^2 - \sum |x_m^n|^2} < \varepsilon$$

עבור n, l גדולים מספיק. נשאיף $l \longrightarrow \infty$ ונקבל:

$$\|\{x_m\}_{n=1}^{\infty} - \{x_m^n\}_{n=1}^{\infty}\|_2 = \sqrt{\sum |x_m|^2 - \sum |x_m^n|^2} \leq \varepsilon$$

ולכן הסדרה $\{(x_m^n)_m\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לסדרה $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$. לכן המרחב שלם.

15. תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי.

(א) נניח שקיימת סדרת מספרים $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת מספרים ששואפת לאינסוף ו־$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־x.

לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $m, n > n_0$ מתקיים: $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

כמו כן, קיים k עבורו $n_k > n_0$ ו־$d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$, מהתכנסות תת־הסדרה.

לכן, לכל $n > n_0$:

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < 2\varepsilon$$

ולכן $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־x.

(ב) במרחב קומפקטי, לכל סדרה יש תת־סדרה מתכנסת ובפרט לכל סדרת קושי יש תת־סדרה מתכנסת. לפי הסעיף הקודם פירוש הדבר שכל סדרת קושי היא בעצמה סדרה מתכנסת, ולכן המרחב שלם.

16. נניח שהמרחב לא שלם. לכן, קיימת סדרת קושי לא מתכנסת, $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$. נגדיר: $F_n=\{x_m\}_{m=n}^{\infty}$, זנב הסדרה החל מהאיבר ה$-n$.

למה אלו קבוצות סגורות? אלו סדרות קושי לא מתכנסות. סדרה כזו היא קבוצה סגורה, מכיוון שאם הייתה לה נקודת הצטברות אז היא הייתה גבול חלקי של הסדרה ולפי השאלה הקודמת זה היה הגבול של הסדרה עצמה והסדרה הייתה מתכנסת וסתירה! לכן אין נקודות הצטברות והקבוצה סגורה (שהרי היא מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה).

מכיוון שהסדרה היא סדרת קושי, לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $n,m>n_0$ מתקיים $d\left(x_n,x_m\right)<\varepsilon$. כלומר, כל שני איברים ב$-F_{n_0}$ קרובים אחד לשני עד כדי ε ולכן $\delta\left(F_{n_0}\right)\leq\varepsilon$. בפרט, $\delta\left(F_{n_0}\right)\longrightarrow 0$, אך $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x_m\}_{m=n}^{\infty}=\emptyset$.

לצד השני, אם המרחב שלם, נבחר סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש$-x_n\in F_n$. לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 עבורו $\delta\left(F_{n_0}\right)<\varepsilon$ ובפרט לכל $m,n>n_0$ מתקיים $x_n,x_m\in F_{n_0}$ ולכן:

$$d\left(x_n,x_m\right)\leq\delta\left(F_{n_0}\right)<\varepsilon$$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ולכן מתכנסת לגבול x, כי המרחב שלם. בנוסף, לכל n מתקיים: $\{x_m\}_{m=n}^{\infty}\subseteq F_n$ ולכן הגבול x שייך ל$-F_n$.

לכן, $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$ ואם כך $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\emptyset$.

3 רציפות במרחבים מטריים, ובמיוחד ב$-\mathbb{R}^n$.

3.1 רציפות באמצעות קבוצות פתוחות וסגורות

הגדרה 3.1 תהי $f:X\to Y$ פונקציה ותהיינה $A\subseteq X,B\subseteq Y$.

1. **התמונה** של A מוגדרת על ידי: $f\left(A\right)=\{f\left(a\right)|a\in A\}$.

2. **התמונה ההפוכה** של B מוגדרת על ידי: $f^{-1}\left(B\right)=\{x\in X|f\left(x\right)\in B\}$.

התמונה היא קבוצת כל התמונות; התמונה ההפוכה היא קבוצת כל המקורות.

הגדרה 3.2 נאמר שפונקציה $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ היא **רציפה**, אם לכל $V\subseteq Y$ פתוחה, גם $f^{-1}(V)\subseteq X$ פתוחה.

כלומר, תמונה הפוכה של פתוחה היא פתוחה. אפשר להכליל הגדרה זו למרחבים כלליים, כפי שתראו בקורס בטופולוגיה.

באופן שקול, פונקציה היא רציפה אם תמונה הפוכה של סגורה היא סגורה.

משפט 3.3 כל פונקציות שהן רציפות ב־$\mathbb{R}$ רציפות גם ב־$\mathbb{R}^n$. פולינומים, פונקציות טריגונומטריות וטריגונומטריות הפוכות, פונקציות היפרבוליות, פונקציות רציונליות, פונקציות מעריכיות, פונקציות לוגריתמיות וכן הלאה; כולן רציפות בכל מספר משתנים.

תרגיל:

הראו שכל מישור ב־$\mathbb{R}^3$ הוא קבוצה סגורה.

פתרון:

משוואת מישור היא $ax+by+cz+d=0$.

נתבונן בפונקציה $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י: $f(x,y,z)=ax+by+cz+d$.

זו פונקציה רציפה (פולינום) ומתקיים:

$$f^{-1}(\{0\})=\{(x,y,z)\,|ax+by+cz+d=0\}$$

שזהו המישור שלנו. $\{0\}$ סגורה, f רציפה ולכן גם המישור הוא סגור.

תרגיל:

בעזרת רציפות, הראו שהקבוצה $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|yx<1\right\}$ פתוחה ב־$\mathbb{R}^2$.

פתרון:

נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x,y)=xy$. f רציפה במכפלת הטלות, ואז:

$$D=f^{-1}\{(-\infty,1)\}$$

הקרן $(-\infty,1)$ פתוחה ב־$\mathbb{R}$ ולכן גם D פתוחה.

3.2 גבולות של פונקציות ב־$\mathbb{R}^n$

הגדרה 3.4 תהי $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$. נאמר שהגבול של f בנקודה a הוא L ונסמן $\lim_{x\to a} f(x) = L$, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $d_1(x, a) < \delta$, אז:

$$d_2(f(x), L) < \varepsilon$$

פונקציה היא רציפה בנקודה אם הגבול בנקודה שווה לערך בנקודה. כלומר:

f רציפה בנקודה a אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $d_1(x, a) < \delta$ אז $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

למקרה שהמילה "רציפות" עוררה בכם געגועים לאפסילון ודלתא, הנה הם במלוא תפארתם.

איך מחשבים גבול של פונקציה? במשתנה אחד, בדקנו את שני הגבולות החד־צדדיים; אם הם קיימים ושווים, הגבול קיים. זאת, מכיוון שלנקודה בישר הממשי אפשר לשאוף משני כיוונים בלבד - ימין ושמאל. מה קורה במימדים יותר גבוהים? כבר במישור, אפשר לשאוף אל נקודה מאינסוף מסלולים שונים!

מצד אחד, כדי להראות שאין גבול יש לבחור שני מסלולים שונים אל עבר הנקודה שהגבול בהם שונה, ומגוון המסלולים מקל עלינו את הבחירה. מצד שני, כדי להראות שיש גבול יש להראות שכל המסלולים מתכנסים לאותו הגבול.

כדי לעשות זאת, אפשר להשתמש במשפט הסנדויץ', באריתמטיקה של גבולות ובהצבה של כמה משתנים כמשתנה אחד (שאת הגבול שלו אנו יודעים לחשב). לא ננסח את משפט הסנדויץ' ואת המשפט על אריתמטיקה של גבולות מכיוון שהם הכללות ישירות של אותם המשפטים ביחס לפונקציות של משתנה יחיד.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את הגבולות הבאים:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x-2y}{2x-3y}$.

במסלול $y = 0$ נקבל $\frac{3}{2}$ ובמסלול $x = 0$ נקבל $\frac{2}{3}$ ולכן הגבול אינו קיים.

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$.

$\lim x=0$, $\lim \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=1$ ולכן בסה"כ הגבול הוא 0.

3. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{4x+y-z}{2x-5y+2z}$.

במסלול $x=y=0$ נקבל $-\frac{1}{2}$ ובמסלול $x=z=0$ נקבל $-\frac{1}{5}$ ולכן הגבול אינו קיים.

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-|x-y|}{x^2-2xy-y^2}}$.

נסמן: $t=x-y$, ואז:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-|x-y|}{x^2-2xy-y^2}}=\lim_{t\to 0} e^{\frac{-|t|}{t^2}}=0$$

5. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^4+y^4+z^2}$.

במסלול $x=0$ נקבל 0.

במסלול $x=y, z=x^2$ נקבל $\frac{1}{3}$ ולכן הגבול אינו קיים.

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{|x|+|y|}\cos\frac{1}{y^2}$.

לפי סנדוויץ':

$$0\le\left|\frac{x^2}{|x|+|y|}cos\frac{1}{y^2}\right|\le\left|\frac{x^2}{|x|+|y|}\right|\le\left|\frac{x^2}{|x|}\right|=|x|\to 0$$

ולכן הגבול הוא 0.

<u>תרגיל:</u>

האם הפונקציה

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{x^2+x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

רציפה?

<u>פתרון:</u>

ברור שהפונקציה רציפה בכל נקודה שאינה $(0,0)$.

בנקודה $(0,0)$ הגבול לא קיים, כי אם נתבונן במסלולים $y=ax$, נקבל:

$$\lim_{x\to 0} f\left(x,ax\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3+a^3x^3}{x^2+a^2x^2}=\frac{1}{1+a^2}$$

כלומר הגבול משתנה בהתאם ל־a ולכן הוא לא קיים, ולכן f אינה רציפה בנקודה $(0,0)$.

<u>תרגיל:</u>

האם ניתן להגדיר את $f\left(x,y\right)=\frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}$ כרציפה ב־$(0,0)$?

<u>פתרון:</u>

כן. נסמן: $t=x^2+y^2$ ואז:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x,y\right)=\lim\frac{x^2+y^2}{\sin\left(x^2+y^2\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$$

ולכן כדי לקבל רציפות נגדיר: $f\left(0,0\right)=1$.

<u>תרגיל:</u>

האם הפונקציות הבאות רציפות?

1. $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\arctan\frac{x^2+1}{x^2+(y-1)^2} & (x,y)\neq(0,1)\\ \frac{\pi}{2} & (x,y)=(0,1)\end{cases}$.

בכל נקודה שאינה $(0,1)$ הפונקציה רציפה כהרכבת רציפות. בנקודה $(0,1)$ נקבל:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f\left(x,y\right)=\lim_{z\to\infty}\arctan z=\frac{\pi}{2}$$

ולכן הפונקציה רציפה.

2. $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

במסלול $x=y$ נקבל $\lim_{x\to 0} f\left(x,x\right)=1$ ולכן לא רציפה בנקודה $(0,0)$. בכל נקודה אחרת הפונקציה רציפה.

3. $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$.

לפי סנדוויץ':

$$0 \le \left|\frac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2}\right| + \left|\frac{xy^2}{y^2}\right| = |x| + |x| \to 0$$

ולכן הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$. שימו לב: הביטוי $x^2+y^2 \neq 0$ זהה במשמעותו לביטוי $(x,y) \neq (0,0)$. בכל נקודה אחרת הפונקציה רציפה כמנת רציפות.

<u>תרגיל:</u>

א. האם הפונקציה:

$$f\left(x,y\right) = x\ln\left(x^2+3y^2\right)$$

רציפה ב– $(0,0)$?

<u>פתרון:</u>

בוודאי שלא, היא הרי לא מוגדרת בנקודה זו.

ב. האם ניתן להגדיר את הפונקציה כך שתהיה רציפה ב– $(0,0)$?

<u>פתרון:</u>

נבדוק האם הגבול בנקודה קיים. נסמן: $t^2 = x^2+3y^2$, ואז: $x^2 \le t^2$ ולכן $|x| \le |t|$. לפיכך:

$$0 \le \left|x\ln\left(x^2+3y^2\right)\right| = |x| \cdot \left|\ln\left(x^2+3y^2\right)\right| \le \left|t\ln t^2\right|$$

וזהו גבול של משתנה אחד, ניתן לחשב אותו בעזרת לופיטל:

$$\lim_{t\to 0} t\ln t^2 = \lim_{t\to 0}\frac{2\ln t}{\frac{1}{t}} \overset{L}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\frac{2}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = 0$$

ולכן לפי כלל הסנדוויץ':

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x,y\right) = 0$$

ולכן ניתן להגדיר את הפונקציה כך שתהיה רציפה ב– $(0,0)$: $f\left(0,0\right) = 0$.

3.3 רציפות באמצעות התכנסות סדרות

משפט 3.5 יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים, תהי $x\in X$ ותהי $f:X\to Y$. אזי, התנאים הבאים שקולים:

1. f רציפה.
2. אם $x_n\xrightarrow{d}x$ אז $f(x_n)\xrightarrow{\rho}f(x)$.

בדומה להגדרת הרציפות לפי היינה, שראינו לגבי פונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

תרגיל:

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה, ונסמן: $G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|f(x)=y\right\}$. זהו הגרף של הפונקציה. הראו ש־G סגורה ב־$\mathbb{R}^2$.

פתרון:

תהי סדרה $G\supseteq\left\{(x_n,y_n)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ המתכנסת (לפי d_{max}) לנקודה (x,y). צ"ל $(x,y)\in G$.

נזכור שההטלה p_1 רציפה. לכן:

$$x_n=p_1(x_n,y_n)\to p(x,y)=x$$

באופן דומה, ההטלה p_2 רציפה ולכן $y_n\to y$.

כעת, מכיוון שהפונקציה רציפה, $y_n=f(x_n)\to f(x)$ ומיחידות הגבול נקבל:

$$y=f(x)$$

לכן $(x,y)\in G$ ולכן הקבוצה G סגורה.

תרגיל:

נתבונן במרחב $C[0,1]$, מרחב כל הפונקציות הרציפות $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ עם מטריקת המקסימום.

א. תהי $a\in[0,1]$. נגדיר פונקציה $F_a:C[0,1]\to\mathbb{R}$ על ידי: $F_a(f)=f(a)$. הוכיחו שזו פונקציה רציפה.

פתרון:

תהי $\{f_n\} \subseteq C[0,1]$ סדרת פונקציות המתכנסת ל- $f \in C[0,1]$.

נראה ש- $F_a(f_n) \longrightarrow F_a(f)$ ונסיק מכך ש- F_a אכן רציפה.

$F_a(f_n) \longrightarrow F_a(f)$ פירושו $f_n(a) \longrightarrow f(a)$ לפי הגדרת F_a. מתקיים:

$$0 \le |f_n(a) - f(a)| \le \max_{x\in[0,1]} \{f_n(x) - f(x)\} = d(f_n, f)$$

ומכיוון ש- $f_n \longrightarrow f$, $d(f_n,f) \longrightarrow 0$ ולכן לפי סנדוויץ', $f_n(a) \longrightarrow f(a)$ ולכן F_a רציפה.

ב. הוכיחו שהקבוצה $\left\{f \in C[0,1] : f\left(\frac{1}{3}\right) < 19\right\}$ פתוחה ב- $C[0,1]$.

פתרון:

שימו לב שקצת קשה לתפוס אינטואיטיבית איך אמורה להיראות קבוצה פתוחה של פונקציות, אבל בעזרת הרציפות החיים קלים:

$$\left\{f \in C[0,1] : f\left(\frac{1}{3}\right) < 19\right\} = \left\{f \in C[0,1] : F_{\frac{1}{3}}(f) < 19\right\} = F_{\frac{1}{3}}^{-1}((-\infty, 19))$$

ומכיוון ש- $(-\infty,19)$ פתוחה ב- $\mathbb{R}$ ו- $F_{\frac{1}{3}}$ רציפה, גם הקבוצה שלנו פתוחה.

3.4 רציפות במידה שווה

הגדרה 3.6 (לפי קושי) יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים, ותהי $f:(X,d_1) \to (Y,d_2)$.
נאמר ש- f רציפה במידה שווה (רבמ"ש), אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $x_1, x_2 \in D$ מקיימים $d_1(x_1,x_2) < \delta$ אז $d_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

(לפי היינה) יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים, ותהי $f:(X,d_1) \to (Y,d_2)$.
נאמר ש- f רציפה במידה שווה, אם לכל שתי סדרות $X \supseteq \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימות: $d_1(a_n,b_n) \longrightarrow 0$ מתקיים: $d_2(f(x_1), f(x_2)) \longrightarrow 0$.

נשתמש בהגדרה השנייה כאשר נרצה להפריך רציפות במידה שווה; נחפש שתי סדרות שהמרחק ביניהן שואף לאפס אך המרחק בין תמונותיהן אינו שואף לאפס.

ניזכר קצת ברציפות במידה שווה של פונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

איך מראים שפונקציה אינה רציפה במ"ש? מוצאים סדרה או סדרות איברים שההפרשים ביניהם שואפים לאפס, אך ההפרש בין תמונותיהם לא שואף לאפס.

<u>תרגיל:</u>

האם הפונקציה $f\left(x\right)=e^{x}$ רציפה במ"ש ב$-\mathbb{R}$?

<u>פתרון:</u>

לא. יהי $\varepsilon<1$. נתבונן בשתי הסדרות:

$$\left\{ x_{n}\right\} =\ln\left(n+1\right),\left\{ y_{n}\right\} =\ln n$$

מתקיים:

$$\left|x_{n}-y_{n}\right|=\left|\ln\left(n+1\right)-\ln n\right|=\left|\ln\frac{n+1}{n}\right|\longrightarrow\ln1=0$$

כאשר $n\longrightarrow\infty$ (כפלנו וחילקנו בצמוד), ולכן לכל $\delta>0$ קיים n_{δ} כך שלכל $n>n_{\delta}$ מתקיים: $\left|x_{n}-y_{n}\right|<\delta$, אך:

$$\left|f\left(x_{n}\right)-f\left(y_{n}\right)\right|=\left|e^{\ln\left(n+1\right)}-e^{\ln n}\right|=\left|n+1-n\right|=1>\varepsilon$$

ולכן הפונקציה אינה רציפה במ"ש.

משפט 3.7 תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, אזי f רציפה במ"ש בקטע. משפט זה נקרא משפט קנטור.

איך נכליל את המשפט למרחב מטרי כלשהו?

תהי f פונקציה רציפה בקבוצה קומפקטית K, אזי f רציפה במ"ש ב$-K$.

<u>תרגיל:</u>

האם הפונקציה $f\left(x,y\right)=\cos\frac{1}{1-x^{2}-y^{2}}$ רציפה במ"ש בתחומים הבאים:

א. $A=\left\{ \left(x,y\right)|x^{2}+y^{2}<1\right\}$.

<u>פתרון:</u>

לא. נתבונן בסדרות: $b_n = \left(\sqrt{1-\frac{1}{\pi(n+1)}}, 0\right), a_n = \left(\sqrt{1-\frac{1}{\pi n}}, 0\right)$. הן נמצאות בתחום שלנו ומתקיים:

$$a_n, b_n \to (1,0)$$

ולכן: $\|a_n - b_n\| \to 0$. אלא שמתקיים:

$$f(a_n) = \cos \pi n, f(b_n) = \cos \pi (n+1)$$

ולכן:

$$\|f(a_n) - f(b_n)\| = \|\cos \pi n - \cos \pi (n+1)\| = \|(-1)^n 2\| = 2$$

ולכן הפונקציה אינה רציפה במ"ש בתחום A.

ב. $B = \left\{(x,y) | 3 < x^2 + y^2 < 4\right\}$.

<u>פתרון:</u>

כן. נרחיב את התחום שלנו לתחום:

$$\left\{(x,y) | 3 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}$$

זו קבוצה סגורה וחסומה והפונקציה שלנו רציפה בתחום זה ולכן היא גם רציפה במ"ש עליו; לכן היא גם רציפה בתחום B החלקי לו.

3.5 תכונות של פונקציות רציפות

משפט 3.8 (ויירשטראס) תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, אזי f מקבלת מינימום ומקסימום בקטע.

איך נכליל את המשפט למרחבים מטריים כלליים?

תהי f פונקציה רציפה בקבוצה קומפקטית K, אזי f מקבלת מינימום ומקסימום בקטע.

<u>תרגיל:</u>

תהי $K \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה קומפקטית עבורה לכל $(x,y) \in K$, $y \neq 0$. ונגדיר $f : K \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$f(x,y) = x^2 + \sin^2\left(e^{\frac{x}{y}}\right)$$

הוכיחו כי קיים $a \in \mathbb{R}$ חיובי כך שלכל $(x,y) \in K$ מתקיים: $a \leq f(x,y)$.

<u>פתרון:</u>

מכיוון שהפונקציה f רציפה על קבוצה קומפקטית יש לה מינימום ומקסימום ב$-K$.

נסמן את ערך המינימום ב$-a$.

לכן, קיימת $(x_0,y_0) \in K$ כך ש$-f(x_0,y_0) = a$ ולכל $(x,y) \in K$ מתקיים:

$$a \leq f(x,y)$$

יתר על כן, ברור שמתקיים:

$$f(x,y) = x^2 + \sin^2\left(e^{\frac{x}{y}}\right) \geq 0$$

נניח בשלילה שקיימת $(x,y) \in K$ עבורה $f(x,y) = 0$. כלומר:

$$x^2 = 0 \wedge \sin^2\left(e^{\frac{x}{y}}\right) = 0$$

מהשיוויון הראשון נקבל $x = 0$ אך זה נותן $\sin^2\left(e^{\frac{0}{y}}\right) = \sin^2 1 \neq 0$ וסתירה!

לכן לא קיימת נקודה (x,y) כזו ולכן $f(x,y) > 0$ לכל נקודה $(x,y) \in K$; בפרט, $f(x_0,y_0) = a > 0$.

משפט 3.9 יהיו $(X,d), (Y,\rho)$ מרחבים מטריים, ותהי $f : (X,d_1) \to (Y,d_2)$ רציפה.

1. אם $K \subseteq X$ קומפקטית, גם $f(K) \subseteq Y$ קומפקטית.

2. אם $C \subseteq X$ קשירה, גם $f\left(C\right) \subseteq Y$ קשירה.

<u>תרגיל:</u>

תהי $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^n$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. תהיינה $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to D$ מסילות רציפות עבורן:

$$\gamma_1\left(0\right) = \gamma_2\left(1\right) = a, \gamma_2\left(0\right) = \gamma_1\left(1\right) = b$$

אזי, קיים $t \in (0,1)$ עבורו $f\left(\gamma_1\left(t\right)\right) = f\left(\gamma_2\left(t\right)\right)$.

<u>פתרון:</u>

שימו לב לכך שהקטע פתוח, כלומר אנו לא רוצים לקחת את הקצוות. לכן, נפריך על ידי מסילות ששוות בקצוות בלבד ופונקציה יחסית פשוטה, למשל:

$$f\left(x,y\right) = y$$

$$a = \left(1,0\right), b = \left(-1,0\right)$$

$$\gamma_1\left(t\right) = \left(\cos \pi t, \sin \pi t\right), \gamma_2\left(t\right) = -\gamma_1\left(t\right)$$

אך לכל $t \in (0,1)$ נקבל:

$$f\left(\gamma_1\left(t\right)\right) = \sin \pi t > 0 > -\sin \pi t = f\left(\gamma_2\left(t\right)\right)$$

ולכן לא קיים t כנדרש.

ב. תהיינה $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to D$ מסילות רציפות עבורן:

$$\gamma_1\left(0\right) = \gamma_2\left(1\right) = a, \gamma_2\left(0\right) = \gamma_1\left(1\right) = b$$

אזי, קיים $t \in [0,1]$ עבורו $f(\gamma_1(t)) = f(\gamma_2(t))$.

<u>פתרון:</u>

כאן הקטע סגור. נוכיח את הטענה.

ראשית, אם $f(a) = f(b)$ הטענה נכונה, מכיוון ש:

$$f(\gamma_1(0)) = f(a) = f(b) = f(\gamma_2(0))$$

אם כן, נניח ש- $f(a) = f(b)$, ובה"כ $f(b) > f(a)$.

נגדיר פונקציה $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ על ידי:

$$g(t) = f(\gamma_1(t)) - f(\gamma_2(t))$$

מצד אחד, $g(0) = f(a) - f(b) < 0$ ומצד שני $g(1) = f(b) - f(a) > 0$. g רציפה כהרכבת רציפות, ולכן לפי משפט ערך הביניים קיים $t \in [0,1]$ עבורו: $g(t) = 0$, כלומר:

$$f(\gamma_1(t)) = f(\gamma_2(t))$$

כנדרש.

הגדרה 3.10 יהי X מרחב מטרי. נאמר ש- X מקיים את **תכונת ערך הביניים** אם לכל פונקציה רציפה $f : X \to \mathbb{R}$, לכל $a, b \in X$ ולכל t בין $f(a)$ לבין $f(b)$ קיים $c \in X$ עבורו: $f(c) = t$.

משפט 3.11 יהי X מרחב מטרי ותהי $E \subseteq X$ קשירה. אזי E מקיימת את תכונת ערך הביניים.

תרגילים נוספים

1. הוכיחו כי הנורמה האוקלידית הסטנדרטית $\|\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה.

2. האם הפונקציות הבאות רציפות?

(א) העתקת ההטלה על הרכיב הראשון, $p_1 : (\mathbb{R}^n, d_{max}) \to (\mathbb{R}, ||)$.

(ב) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+x^3+y^3}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

(ג) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arcsin(xy-2)}{\arctan(3xy-6)} & (x,y) \neq (2,1) \\ 0 & (x,y) = (2,1) \end{cases}$$

3. הוכיחו בעזרת רציפות:

(א) הקבוצה $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sin x + xy \leq 5\right\}$ סגורה ב-$\mathbb{R}^2$.

(ב) קבוצת המטריצות ההפיכות $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ פתוחה ב-$M_n(\mathbb{R})$.

4. הוכיחו או הפריכו:

(א) תהיינה d_1, d_2 מטריקות מעל קבוצה X ותהיינה ρ_1, ρ_2 מטריקות מעל קבוצה Y. תהי $f : (X, d_1) \to (Y, \rho_1)$ רציפה. אזי גם $f : (X, d_2) \to (Y, \rho_2)$ רציפה.

(ב) תהי $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ פונקציה בין שני מרחבים מטריים. אזי f רציפה אם ורק אם לכל **כדור פתוח** $O \subseteq Y$, $f^{-1}(O)$ פתוחה ב-X.

(ג) תהי $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ פונקציה בין שני מרחבים מטריים. אזי f רציפה אם ורק אם לכל **כדור סגור** $O \subseteq Y$, $f^{-1}(O)$ סגורה ב-X.

5. יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $a \in X$.

(א) הוכיחו כי הפונקציה $f_a : X \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f_a(x) = d(x,a)$ היא רציפה.

(ב) הסיקו שלכל $r>0$ כדור סגור הוא קבוצה סגורה.

6. האם הפונקציות הבאות רציפות במ"ש?

(א) $f\left(x\right)=\sin x^{2}$ ב$-\mathbb{R}$.

(ב) $f\left(x,y\right)=\arcsin\frac{x}{y}$ בתחום $D=\left\{ \left(x,y\right):\left|x\right|\leq\left|y\right|,y\neq0\right\}$.

7. תהי $f\left(x,y\right)$ פונקציה המוגדרת בתחום D ורציפה לפי המשתנה x, כלומר אם מקבעים את $y=y_{0}$ מקבלים פונקציה רציפה של משתנה אחד:

$$\lim_{x\to x_{0}}f\left(x,y_{0}\right)=f\left(x_{0},y_{0}\right)$$

(א) נניח ש$-f$ רציפה גם לפי y. האם f רציפה?

(ב) נניח ש$-f$ רציפה במ"ש לפי y. האם f רציפה?

(ג) נניח ש$-f$ מקיימת את תנאי ליפשיץ לפי y: קיים K עבורו: $\left|f\left(x,y_{1}\right)-f\left(x,y_{2}\right)\right|<K\cdot\left|y_{1}-y_{2}\right|$. האם f רציפה?

8. יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי. ותהיינה $f,g:X\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות במ"ש. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $f\left(x\right)\neq0$ אז $\frac{1}{f}$ רציפה במ"ש.

(ב) אם קיים $R>0$ עבורו $\left|f\left(x\right)\right|\geq R$ לכל $x\in X$ אז f רציפה במ"ש.

(ג) $f\cdot g$ רציפה במ"ש.

(ד) אם f חסומה אז $f\cdot g$ רציפה במ"ש.

(ה) אם f,g חסומות אז $f\cdot g$ רציפה במ"ש.

9. תהי $f_{n}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ סדרת פונקציות רציפות במ"ש.

(א) נניח שהסדרה מתכנסת לפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ בנורמה $\left\Vert f\right\Vert =\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x\right)\right|dx$. האם f רציפה במ"ש?

(ב) נניח שהסדרה מתכנסת לפונקציה $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ בנורמה $\|f\|=\sup\{|f(x)|:x\in\mathbb{R}\}$.

האם f רציפה במ"ש?

פתרונות

1. הנורמה האוקלידית מוגדרת על ידי:

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$$

והיא רציפה כהרכבת רציפות.

2. נבדוק את רציפות הפונקציות.

(א) הנורמה האוקלידית היא הרכבה של פונקציות רציפות ולכן רציפה.

צ"ל שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d_{max}(x,a)<\delta$ אזי $|x-a_1|<\varepsilon$,

כאשר $x=(x_1,...,x_n),a=(a_1,...,a_n)$.

מתקיים:

$$|x_1-a_1|<\underset{1\leq i\leq n}{max}\{|x_i-a_i|\}=d_{max}(x,a)$$

יהי $\varepsilon>0$, נבחר $\delta=\varepsilon$ ואז אם $d_{max}(x,a)<\delta$ אזי $|x_1-a_1|<\delta=\varepsilon$.

באופן כללי, ההטלה על כל רכיב היא רציפה.

(ב) לכל $(x,y)\neq(0,0)$ הפונקציה רציפה כמנת רציפות.

נבדוק האם הגבול $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)}f(x,y)$ שווה ל-0.

במסלול $x=y$, נקבל:

$$\lim_{x\longrightarrow0}f(x,x)=\lim_{x\longrightarrow0}\frac{x^2+x^3+x^3}{x^2+x^2}=\lim_{x\longrightarrow0}\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}$$

לכן הגבול שונה מ-0 (אין אפילו צורך לבדוק אם הוא אכן קיים) ולכן הפונקציה אינה רציפה.

(ג) בתחום הגדרתה (מהו תחום הגדרתה של הפונקציה?), הפונקציה רציפה כמנת רציפות. היכן שהפונקציה אינה מוגדרת היא בוודאי אינה רציפה.

נבדוק האם הגבול $\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y)$ שווה ל־0.

נציב $t = xy - 2$ ונקבל את הגבול:

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\arcsin t}{\arctan 3t} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{3}{1+(3t)^2}} = \frac{1}{3}$$

לפי כלל לופיטל. לכן, הפונקציה אינה רציפה בנקודה $(2,1)$.

3. נחפש קבוצות מתאימות ונשתמש בתמונה הפוכה.

(א) הפונקציה $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x,y) = \sin x + xy$ היא רציפה.
לכן, מכיוון ש־$A = f^{-1}((-\infty,5])$ ו־$(-\infty,5] \subseteq \mathbb{R}$ סגורה, גם A סגורה.

(ב) נזכור שמטריצה היא הפיכה אם ורק אם דטרמיננטתה (למה לא) שונה מאפס.
הפונקציה $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ רציפה (היא הרי פולינום) .
לכן, מכיוון ש־$GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ ו־$\mathbb{R}\setminus\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה, גם $GL_n(\mathbb{R})$ פתוחה.

4. נשתמש בהגדרת רציפות באמצעות קבוצות פתוחות.

(א) הפרכה. ניקח $X = Y = \mathbb{R}$, את המטריקה d_1 להיות המטריקה הדיסקרטית ואת שאר המטריקות d_2, ρ_1, ρ_2 להיות המטריקה הסטנדרטית.
נקבל שכל פונקציה $f : (X,d_1) \to (Y,\rho_1)$ היא רציפה כי כל קבוצה ב־(X,d_1) היא פתוחה (זו המטריקה הדיסקרטית), אך בוודאי שניתן למצוא פונקציה $f : (X,d_2) \to (Y,\rho_2)$ שאינה רציפה, למשל:

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 1 \\ -7 & x \le 1 \end{cases}$$

(ב) הוכחה. אם f רציפה אז $f^{-1}(O)$ פתוחה ב־X לכל O פתוחה ב־Y. כל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה ולכן לכל כדור פתוח O, $f^{-1}(O)$ פתוחה.

לצד השני, לכל כדור פתוח $O\subseteq Y$, $f^{-1}\left(O\right)$ פתוחה ב$-X$. תהי $U\subseteq Y$ פתוחה. לכל $x\in U$ קיים $r_x>0$ עבורו $B\left(x,r_x\right)\subseteq U$.

לכן: $U=\bigcup_{x\in U}B\left(x,r_x\right)$, ולכן:

$$f^{-1}\left(U\right)=f^{-1}\left(\bigcup_{x\in U}B\left(x,r_x\right)\right)=\bigcup_{x\in U}f^{-1}\left(B\left(x,r_x\right)\right)$$

וזהו איחוד של קבוצות פתוחות ולכן קבוצה פתוחה. תמונה הפוכה של פתוחה היא פתוחה ולכן הפונקציה רציפה.

*הראו שתמונה הפוכה של איחוד אכן שווה לאיחוד התמונות ההפוכות.

(ג) הפרכה. ניקח $X=Y=\mathbb{R}$, d המטריקה הסטנדרטית ו$-\rho$ המטריקה הדיסקרטית. תהי $f=Id$ פונקציית הזהות. הפונקציה אינה רציפה, שכן $\{5\}$ פתוחה ב$-\left(Y,\rho\right)$ אך $f^{-1}\left(\{5\}\right)=\{5\}$ לא פתוחה במטריקה הסטנדרטית.

מצד שני, במטריקה הדיסקרטית כדור סגור ברדיוס 1 הוא המרחב כולו וכדור סגור עם רדיוס קטן מ-1 הוא נקודון מהצורה $\{x\}$.

כעת, גם עבור המרחב כולו: $f^{-1}\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R}$ וגם עבור נקודון $f^{-1}\left(\{x\}\right)=\{x\}$ נקבל שהקבוצה אכן סגורה ב$-\left(X,d\right)$, אך כמו שהסברנו הפונקציה אינה רציפה.

5. נשתמש בהגדרת רציפות עם אפסילון ודלתא.

(א) יהי $x\in X$, ויהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\varepsilon$, ואז אם $d\left(x,y\right)<\delta$ נקבל:

$$\left|f_a\left(x\right)-f_a\left(y\right)\right|=\left|d\left(x,a\right)-d\left(y,a\right)\right|\leq d\left(x,y\right)<\delta=\varepsilon$$

לפי אי שוויון המשולש, ולכן הפונקציה רציפה.

(ב) מתקיים:

$$B\left[a,r\right]=\{x\in X:0\leq d\left(x,a\right)\leq r\}=\{x\in X:0\leq f_a\left(x\right)\leq r\}=f_a^{-1}\left(\left[0,r\right]\right)$$

הקטע $\left[0,r\right]\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה סגורה והפונקציה f_a רציפה ולכן גם $B\left[0,r\right]$ קבוצה סגורה.

6. נראה שהפונקציות אינן רציפות במ"ש, על ידי כך שנצביע על סדרות איברים שההפרשים ביניהם שואפים לאפס אך ההפרשים בין התמונות שלהם לא שואפים לאפס.

(א) לכל $\varepsilon < 1$ נתבונן בסדרות המספרים:

$$x_n = \sqrt{\pi n + \frac{\pi}{2}}, y_n = \sqrt{\pi n}$$

מתקיים:

$$|x_n - y_n| = \left|\sqrt{\pi n + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{\pi n}\right| = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\pi n + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{\pi n}} \longrightarrow 0$$

כאשר $n \longrightarrow \infty$ (כפלנו וחילקנו בצמוד), ולכן לכל $\delta > 0$ קיים n_δ כך שלכל $n > n_\delta$ מתקיים: $|x_n - y_n| < \delta$, אך:

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left|\sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(\pi n)\right| = 1 > \varepsilon$$

ולכן הפונקציה אינה רציפה במ"ש.

(ב) שוב, נתבונן בסדרות:

$$x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), y_n = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$$

מתקיים:

$$|x_n - y_n| = \left|\left(0, \frac{2}{n}\right)\right| = \frac{2}{n} \longrightarrow 0$$

כאשר $n \longrightarrow \infty$, אך:

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \sqrt{(\arcsin 1 - \arcsin(-1))^2} = \pi$$

ולכן אין רציפות במ"ש.

7. נבדוק האם רציפות מתקיימת.

(א) לא בהכרח. נתבונן בפונקציה:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left|\frac{x+y}{x-y}\right| & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

אם מקבעים את x או את y הפונקציה אכן רציפה לפי המשתנה השני:

$$\lim_{x\to 0} f\left(x,0\right) = \left|\frac{x}{x}\right| = 1, \lim_{y\to 0} f\left(0,y\right) = \left|\frac{y}{-y}\right| = 1$$

אבל לכל k נקבל במסלולים $y = kx$ גבולות שונים ולכן הפונקציה אינה רציפה.

(ב) לא בהכרח. נתבונן בתחום $D = \left[-1,1\right]^2$ ובפונקציה:

$$f\left(x,y\right) = \begin{cases} \left|\frac{y}{x}\right| & \left|y\right| \le \left|x\right|, \left(x,y\right) \neq \left(0,0\right) \\ \left|\frac{x}{y}\right| & \left|x\right| < \left|y\right| \\ 0 & \left(x,y\right) = \left(0,0\right) \end{cases}$$

הפונקציה שלנו רציפה לפי כל אחד מהמשתנים בנפרד (ומכיוון שזהו תחום סגור וחסום, היא גם רציפה במ"ש). אלא שאם נשאף לנקודה $\left(0,0\right)$ במסלול $x = 0$ נקבל:

$$\lim_{y\to 0} f\left(0,y\right) = 0$$

ואם נשאף במסלול $y = x$ נקבל:

$$\lim_{x\to 0} f\left(x,x\right) = 1$$

כלומר הגבול לא קיים, ולכן הפונקציה אינה רציפה בנקודה $\left(0,0\right)$.

(ג) הוכחה. נראה שלכל $D \ni \left(x_0,y_0\right)$ המקיימים $\left|\left(x,y\right) - \left(x_0,y_0\right)\right| < \delta$, מתקיים $\left|f\left(x,y\right) - f\left(x_0,y_0\right)\right| < \varepsilon$. ובכן:

$$\left|f\left(x,y\right) - f\left(x_0,y_0\right)\right| \le \left|f\left(x,y\right) - f\left(x,y_0\right)\right| + \left|f\left(x,y_0\right) - f\left(x_0,y_0\right)\right| \le$$

$$\le K\left|y - y_0\right| + \left|f\left(x,y_0\right) - f\left(x_0,y_0\right)\right|$$

f רציפה לפי x כלומר אם $\left|x - x_0\right| < \delta'$ אז לכל y,

$$\left|f\left(x,y\right) - f\left(x_0,y\right)\right| < \varepsilon'$$

נבחר $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ ונבחר:

$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2K}, \delta'\right\}$$

ואם נחזור לאי־השוויון נקבל:

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ולכן הפונקציה רציפה.

8. נפריד ונוכיח ביד רמה.

(א) לא. נתבונן בפונקציה $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=x$. הפונקציה רציפה במ"ש, אך $\frac{1}{f}=\frac{1}{x}$ אינה רציפה במ"ש (התבוננו בנקודות $x_n=\frac{1}{n}, y_n=\frac{1}{n}$, למשל).

(ב) כן. לכל $x,y\in X$ מתקיים:

$$\left|\frac{1}{f}(x)-\frac{1}{f}(y)\right| = \left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\right| = \left|\frac{f(y)-f(x)}{f(x)f(y)}\right| \le \frac{|f(y)-f(x)|}{R^2}$$

f רציפה במ"ש ולכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ עבורו $|f(y)-f(x)|<\varepsilon R^2$ ולכן $\left|\frac{1}{f}(x)-\frac{1}{f}(y)\right|<\varepsilon$ ואכן רציפה במ"ש.

(ג) לא. הדוגמה הנגדית בסעיף הבא.

(ד) לא. נגדיר פונקציות $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על ידי:

$$f(x)=x$$

$$g(x)=\begin{cases} x-\lfloor x\rfloor & \lfloor x\rfloor\in 2\mathbb{Z} \\ 1-(x-\lfloor x\rfloor) & \lfloor x\rfloor\in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

כאשר $\lfloor x\rfloor$ הוא החלק השלם התחתון של x. בין כל מספר זוגי למספר אי־זוגי הפונקציה עולה כקו ישר (ששיפועו 1), מ־0 ל־1, ובין מספר אי־זוגי לזוגי הפונקציה יורדת כקו ישר (ששיפועו 1), מ־1 ל־0.

f רציפה במ"ש, g חסומה וכמו כן g רציפה במ"ש, כי בין כל שני מספרים $x<y$

קרובים מספיק (למשל, שהמרחק ביניהם קטן מחצי) מתקיים שאם $\lfloor x\rfloor < \lfloor y\rfloor$

אז $\lfloor y\rfloor = \lfloor x\rfloor + 1$ ו־$x < \lfloor y\rfloor \leq y$. לכן:

$$|g(y) - g(x)| \leq |g(y) - g(\lfloor y\rfloor)| + |g(\lfloor y\rfloor) - g(x)|$$

$$\leq |g(y) - g(\lfloor y\rfloor)| + |g(\lfloor x\rfloor + 1) - g(x)|$$

נחשב:

$$|g(y) - g(\lfloor y\rfloor)| = \begin{cases} |y - \lfloor y\rfloor - 0| & \lfloor x\rfloor \in 2\mathbb{Z} \\ |1 - (y - \lfloor y\rfloor) - 1| & \lfloor x\rfloor \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases} = y - \lfloor y\rfloor$$

באופן דומה:

$$|g(\lfloor x\rfloor + 1) - g(x)| = \begin{cases} |y - \lfloor y\rfloor - 0| & \lfloor x\rfloor \in 2\mathbb{Z} \\ |1 - (y - \lfloor y\rfloor) - 1| & \lfloor x\rfloor \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases} = \lfloor y\rfloor - x$$

מכיוון ש: $\lfloor y\rfloor = \lfloor x\rfloor + 1$.

לכן:

$$|g(y) - g(x)| \leq y - \lfloor y\rfloor + \lfloor y\rfloor - x = y - x$$

אם $\lfloor y\rfloor = \lfloor x\rfloor$ אז מיד לפי ההגדרה $|g(y) - g(x)| = y - x$.

בכל אופן, $|g(y) - g(x)| \leq |y - x|$ ולכן g רציפה במ"ש (נבחר $\varepsilon = \delta$).

לעומת זאת:

$$f \cdot g(x) = \begin{cases} x^2 - x\lfloor x\rfloor & \lfloor x\rfloor \in 2\mathbb{Z} \\ x(1 + \lfloor x\rfloor) - x^2 & \lfloor x\rfloor \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

ובפרט $f \cdot g(2n) = 0$ וגם $f \cdot g\left(2n + \frac{1}{n}\right) = 2 + \frac{1}{n^2}$, לכן:

$$\left|2n + \frac{1}{n} - 2n\right| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

כאשר $n \longrightarrow \infty$, אך:

$$\left|f \cdot g\left(2n + \frac{1}{n}\right) - f \cdot g(2n)\right| = \left|2 + \frac{1}{n^2}\right| \longrightarrow 2$$

כאשר $n \longrightarrow \infty$ ולכן $f \cdot g$ לא רציפה במ"ש.

(ה) כן. לכל $x,y\in X$ מתקיים:

$$|f\cdot g(x)-f\cdot g(y)|=|f(x)g(x)-f(y)g(y)|\leq$$

$$\leq|f(x)g(x)-f(x)g(y)|+|f(x)g(y)-f(y)g(y)|=$$

$$=|g(x)-g(y)|\cdot|f(x)|+|f(x)-f(y)|\cdot|g(y)|$$

הפונקציות f,g חסומות ולכן קיים $R>0$ עבורו לכל $x\in X$:

$$|f(x)|,|g(x)|\leq R$$

בפרט:

$$|f\cdot g(x)-f\cdot g(y)|\leq R\cdot(|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|)$$

מכיוון שהפונקציות $f.g$ רציפות במ"ש, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ עבורו

$$|f(x)-f(y)|,|g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2R}$$

ולכן

$$|f\cdot g(x)-f\cdot g(y)|<\varepsilon$$

וסיימנו.

9. נשים לב להבדל בין הנורמות.

(א) לא. ניקח את הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}k^2x-k^3 & k\leq x\leq k+\frac{1}{2k^2}\\ k^3-1+k^2x & k+\frac{1}{2k^2}\leq x\leq k+\frac{1}{k^2}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

בתחילת כל קטע $\left[k,k+\frac{1}{k}\right]$ "ראש של משולש שווה שוקיים" בגובה $\frac{1}{2}$ ורוחב בסיס $\frac{1}{k^2}$ ובכל מקום אחר $f=0$. לכן f רציפה.

שטח כל משולש בקטע $\left[k,k+\frac{1}{k}\right]$ הוא $\frac{1}{4k^2}$ ובפרט לכל k,

$$\int_k^{k+1}|f(x)|\,dx=\frac{1}{4k^2}$$

לכל k, $0 \longrightarrow \frac{1}{2k^2}=\left|k+\frac{1}{2k^2}-k\right|$ אך:

$$\left|f\left(k+\frac{1}{2k^2}\right)-f(k)\right|=|1-0|=1$$

ולכן f אינה רציפה במ"ש.

מצד שני, נתבונן בסדרת הפונקציות:

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x) & x\le n\\ 0 & x>n\end{cases}$$

ולכן:

$$\|f-f_n\|=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-f_n(x)|\,dx=\int_n^{\infty}|f(x)|\,dx=\sum_{k=n}^{\infty}\int_k^{k+1}|f(x)|\,dx=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{4k^2}$$

ו־$0 \longrightarrow \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{4k^2}$ כי זהו זנב של טור מתכנס, ולכן $f_n\longrightarrow f$.

הפונקציות f_n רציפות במ"ש, מכיוון שהן רציפות ושונות מ־0 למעט הקטע הסגור $[0,n]$ (ולפי קנטור הן רציפות במ"ש).

(ב) כן. אם מתקיים $0 \longrightarrow \|f-f_n\|$ לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\|f(x)-f_n(x)\|\le\|f-f_n\|<\frac{\varepsilon}{3}$$

בנוסף, קיים $\delta>0$ עבורו לכל $x,y\in\mathbb{R}$ אז $|f_n(x)-f_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$ (כי f_n רציפה במ"ש לכל n) ולכן:

$$|f(x)-f(y)|\le|f_n(y)-f(y)|+|f_n(x)-f(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$$

ולכן גם f רציפה במ"ש.

4 נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות ונגזרות כיווניות

4.1 נגזרות חלקיות

הנגזרת היא מלכת החדו"א. איך גוזרים פונקציות עם יותר ממשתנה אחד?

כרגע, נתעסק רק בפונקציות $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, ובהמשך בפונקציות $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.

הגדרה 4.1 תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. **הנגזרת החלקית** לפי המשתנה x_i בנקודה a מוגדרת כך:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\lim_{\Delta x_i\longrightarrow 0}\frac{f\left(a_1,a_2...,a_i+\Delta x_i,a_{i+1},...,a_n\right)-f\left(a_1,...,a_n\right)}{\Delta x_i}$$

נסמן גם: f_{x_i},f'_{x_i}.

הגרדיאנט הוא וקטור הנגזרות החלקיות:

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

באופן כללי, כאשר נגזור j_i פעמים לפי המשתנה ה־i, נסמן:

$$\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}f}{\partial^{j_1}x_1....\partial^{j_n}x_n}$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\left(x^2+y\right)^2}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

בכל נקודה שאינה $(0,0)$ נגזור כרגיל, כלומר נתייחס אל המשתנה האחר כאל קבוע.

זו נגזרת של מנה, ונקבל:

$$f_x(x,y)=\frac{4xy\left(y^2-x^4\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{2x^6-2x^2y^2}{\left(x^4+y^2\right)^2}$$

בנקודה $(0,0)$ נחשב לפי ההגדרה:

$$f_x(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\frac{t^4}{t^4}-1}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1-1}{t}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\frac{t^2}{t^2}-1}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1-1}{t}=0$$

לא מסובך.

נשאלת השאלה - האם $f_{xy}=f_{yx}$? כלומר, האם אפשר להחליף את סדר הגזירה?

משפט 4.2 החלפת סדר הגזירה:

תהא f פונקציה רציפה בסביבה D של הנקודה x^0 ב$-\mathbb{R}^k$, $k\geq 2$.

נניח שעבור שני אינדקסים i,j הנגזרת $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ קיימת ב$-D$ ורציפה ב$-x^0$, אזי:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x^0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x^0)$$

כלומר ניתן להחליף את סדר הגזירה.

<u>לדוגמה:</u>

ניתן דוגמה לפונקציה שנגזרותיה אינן מתחלפות. נתבונן בפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

נגזור לפי ההגדרה:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t}$$

וכעת:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,0)=\lim_{r\longrightarrow 0}\frac{f(t,r)-f(t,0)}{r}=\lim_{r\longrightarrow 0}\frac{tr\frac{t^2-r^2}{t^2+r^2}-0}{r}=t$$

ולכן:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{t-0}{t}=1$$

מצד שני,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t}$$

שוב, נחשב כל אחד מהביטויים במונה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{r\longrightarrow 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,t)=\lim_{r\longrightarrow 0}\frac{f(r,t)-f(0,t)}{r}=-t$$

ולכן:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{-t-0}{t}=-1$$

ואכן אם נגזור לפי x ואז לפי y נקבל תוצאה אחרת מאשר אם נגזור לפי y ואז נגזור לפי x. חשבו איזה תנאי לא מתקיים כאן.

4.2 דיפרנציאביליות

הגדרה 4.3 תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה.

נאמר שהפונקציה **דיפרנציאבילית** בנקודה $x^0=\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$ אם אפשר לכתוב:

$$f\left(x_1^0+\Delta x_1,...,x_n^0+\Delta x_n\right)=f\left(x^0\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(A_i+\alpha_i\left(\Delta x_i\right)\right)\Delta x_i$$

כאשר $A_1,...,A_n$ קבועים ו־$\alpha_1,...,\alpha_n$ הן פונקציות ששואפות ל־0 כאשר Δx שואף ל־0.

כלומר, בסביבת x^0 אפשר להציג את הפונקציה בקירוב טוב כפונקציה ליניארית.

אם פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה אז היא רציפה שם, והקבועים A_i הם הנגזרות החלקיות בנקודה:

$$A_k=\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x^0\right)$$

תנאי מספיק לדיפרנציאביליות: הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות. תנאי זה לא הכרחי; לאחר התרגיל נדגים זאת.

תנאי הכרחי לדיפרנציאביליות ־ הפונקציה רציפה והנגזרות החלקיות קיימות. תנאי זה לא מספיק; לאחר התרגיל נדגים זאת.

איך בודקים אם פונקציה היא דיפרנציאבילית בנקודה מסוימת אם לאו?

נבדוק את דיפרנציאביליות הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$.

1. $f\left(x,y\right)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

הפונקציה רציפה כהרכבת רציפות.

כדי ש־$f\left(x,y\right)$ תהיה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$ צריך להתקיים:

$$f\left(0+h_1,0+h_2\right)-f\left(0,0\right)=f_x\left(0,0\right)h_1+f_y\left(0,0\right)h_2+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

החלפנו את Δx_i שבהגדרה ב־h_i. כמו שאמרנו, אם היא אכן דיפ' אז הקבועים הם הנגזרות החלקיות בנקודה. ה־o מסמל את הקירוב.

נחשב את הנגזרות החלקיות בנקודה:

$$f_x(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\sqrt[3]{t^3}}{t}=1$$

$$f_y(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=1$$

ולכן יש לבדוק אם מתקיים:

$$\sqrt[3]{h_1^3+h_2^3}=h_1+h_2+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

כלומר, האם:

$$\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{\sqrt[3]{h_1^3+h_2^2}-h_1-h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

כמשמעו של o. אך אם ניקח את המסלול $h_1=h_2=\frac{1}{n}$, נקבל:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{2}{n^3}}-\frac{2}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}}=\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}}\neq 0$$

ולכן הפונקציה אינה דיפרנציאבילית.

2. הפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

נבדוק האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

אם נתבונן במסלול $x=y$ נקבל:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}f(x,x)=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2x^2}{2x^2}=1\neq 0$$

ולכן פונקצייתנו (הפונקציה שלנו חביבי) כלל אינה רציפה בנקודה $(0,0)$ ולכן בוודאי שאינה דיפ'.

3. הפונקציה:

$$f\left(x,y,z\right)=\begin{cases} \frac{1}{x^{2}+y^{2}+z^{2}}e^{-\frac{1}{\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}}} & \left(x,y,z\right)\neq\left(0,0,0\right)\\ 0 & \left(x,y,z\right)=\left(0,0,0\right) \end{cases}$$

נבדוק את רציפות הפונקציה בנקודה $(0,0,0)$:

$$\lim_{(x,y,z)\longrightarrow(0,0,0)}\frac{1}{x^{2}+y^{2}+z^{2}}e^{-\frac{1}{\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}}}=$$

נציב $t=\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}$ ונקבל:

$$=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{1}{t^{2}}e^{-\frac{1}{t}}=0=f\left(0,0,0\right)$$

ולכן הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0,0)$; את הגבול אפשר לחשב בעזרת לופיטל. נחשב את הנגזרות החלקיות בנקודה:

$$f_{x}\left(0,0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{f\left(t,0,0\right)-f\left(0,0,0\right)}{t}=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{1}{t^{3}}e^{-\frac{1}{\sqrt{t^{2}}}}=0$$

באופן דומה קל לראות ש$-0 = f_{y}\left(0,0,0\right)=f_{z}\left(0,0,0\right)$.

כעת, על מנת שהפונקציה תהיה דיפרנציאבילית צריך להתקיים:

$$f\left(h_{1},h_{2},h_{3}\right)-f\left(0,0,0\right)=f_{x}\left(0,0,0\right)h_{1}+f_{y}\left(0,0,0\right)h_{2}+f_{z}\left(0,0,0\right)h_{3}+o\left(\sqrt{h_{1}^{2}+h_{2}^{2}+h_{3}^{2}}\right)$$

כלמור נבדוק האם:

$$\lim_{(h_{1},h_{2},h_{3})\longrightarrow(0,0,0)}\frac{1}{\left(h_{1}^{2}+h_{2}^{2}+h_{3}^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{\sqrt{h_{1}^{2}+h_{2}^{2}+h_{3}^{2}}}}=0$$

ואכן, אם נציב $t=\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}$ נקבל:

$$=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t^3}e^{-\frac{1}{t}}=0$$

ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0,0)$.

לדוגמה:

1. דוגמה לכך שרציפות הנגזרות החלקיות היא תנאי מספיק אך לא הכרחי לדיפרנציאביליות:

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

לפי מה שלמדנו, ניתן לבדוק שהפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

בקצרה, הנגזרות החלקיות בנקודה $(0,0)$ הן 0. לכן, כדי להוכיח דיפרנציאביליות בנקודה יש להוכיח:

$$\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{\left(h_1^2+h_2^2\right)\sin\left(\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

וזה אכן מתקיים.

אלא שהנגזרות בנקודה אינן רציפות; למשל אם נגזור לפי x נקבל במסלול $y=0$

$$f_x(x,0)=2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

שכלל אינה חסומה כאשר $x\rightarrow 0$ ולכן לא רציפה.

2. מאידך גיסא, דוגמה לכך שקיום הנגזרות החלקיות הוא לא תנאי מספיק לדיפרנציאביליות:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

הפונקציה אינה רציפה ב$-(0,0)$(אפשר להתבונן במסלולים מהצורה $y=kx$ ולקבל גבולות שונים) ולכן בוודאי שאינה דיפרנציאבילית.

אף על פי כן, הנגזרות החלקיות קיימות:

$$f_x\left(0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{f\left(t,0\right)-f\left(0,0\right)}{t}=0$$

וכך גם $f_y\left(0,0\right)$. אפשר גם להתבונן בפונקציה הראשונה מהתרגיל הקודם.

4.3 מישור משיק

הגדרה 4.4 **משטח** ב$-\mathbb{R}^3$ נתון ע"י משוואה $f(x,y,z)=0$ עבור פונקציה $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.

תהי $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ נקודה שבסביבה U שלה f גזירה ברציפות.

משוואת **המישור המשיק** למשטח זה בנקודה p_0 היא:

$$f_x(p_0)(x-x_0)+f_y(p_0)(y-y_0)+f_z(p_0)(z-z_0)=0$$

זכרו שמשוואת מישור היא $ax+by+cz+d=0$. נורמל למישור במקרה זה הוא וקטור המקדמים, קרי: (a,b,c).

במקרה של המישור המשיק, נקבל שהנורמל הוא $(f_x(p_0),f_y(p_0),f_z(p_0))$, כלומר:

$$\vec{n}=\nabla f\left(p_0\right)$$

.

המישור המשיק הוא המרחב הנפרש ע"י וקטורי הנגזרות הכיווניות, אליהן נגיע בהמשך.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את כל הנקודות p_0 במשטח $x^2+y^2-z^2=1$ כך שהמישור המשיק למשטח זה בנקודה p_0 מקביל למישור: $x+y+z=1$.

<u>פתרון:</u>

תהי $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ נקודה במשטח. נגדיר פונקציה:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-1$$

הנגזרות החלקיות הן:

$$f_x=2x$$

$$f_y=2y$$

$$f_z=-2z$$

ולכן בנקודה שלנו הנורמל למישור המשיק יהיה $(2x_0,2y_0,-2z_0)$.

כעת, מישורים הם מקבילים אם הנורמלים שלהם תלויים ליניארית.

הנורמל למישור $x+y+z=1$ הוא $(1,1,1)$. לכן, נחפש את כל הנקודות p_0 במשטח כך ש:

$$a\cdot(1,1,1)=(2x_0,2y_0,-2z_0)$$

נקבל:

$$x_0=\frac{a}{2},y_0=\frac{a}{2},z_0=-\frac{a}{2}$$

כעת, הנקודה שלנו על המשטח, ולכן צריך להתקיים:

$$x_0^2+y_0^2-z_0^2-1=0$$

כלומר:

$$\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=0$$

ולכן $a=\pm 2$.

ולכן שתי הנקודות שתקיימנה את הדרוש הן:

$$(1,1,-1)\,,(-1,-1,1)$$

4.4 נגזרת כיוונית

הגדרה 4.5 תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה. נגדיר את **הנגזרת הכיוונית** של f בכיוון h בנקודה a להיות:

$$D_h f\left(a\right)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f\left(a+th\right)-f\left(a\right)}{t}$$

משפט 4.6 תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית, ויהיו $a,h\in\mathbb{R}^n$. אזי:

$$D_h f\left(a\right)=\nabla f\left(a\right)\cdot h$$

הנגזרת הכיוונית בכיוון הגרדיאנט (המנורמל) היא המקסימלית.

כלומר, בכיוון זה הפונקציה עולה בקצב הגדול ביותר.

הערה 4.7 נהוג לחשב את הנגזרת הכיוונית עם וקטור שאורכו 1, כלומר וקטור מנורמל.

<u>תרגיל:</u>

בנקודה $a=(1,1,1)$, באיזה כיוון הפונקציה

$$f\left(x,y,z\right)=x\arctan\left(yz\right)$$

עולה בקצב הגדול ביותר? הגדירו וקטור זה ע"י וקטור שאורכו 1.

כמו כן, חשבו את הנגזרת של f בנקודה a בכיוון זה.

<u>פתרון:</u>

הנגזרות החלקיות של f הן:

$$f_x = \arctan(yz)$$

$$f_y = \frac{xz}{1+(yz)^2}$$

$$f_z = \frac{yx}{1+(yz)^2}$$

הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות בלכ נקודה ולכן f דיפרנציאבילית.

כעת, כיוון העלייה המקסימלי הוא כיוון הגרדיאנט המנורמל. הגרדיאנט הוא:

$$\nabla f(1,1,1) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

ולכן וקטור הכיוון של העלייה המקסימלית מאורך 1 יהיה:

$$h = \frac{\nabla f(1,1,1)}{\|\nabla f(1,1,1)\|} = (0.743, 0.473, 0.473)$$

ומכיוון שהפונקציה דיפרנציאבילית, הנגזרת הכיוונית בכיוון זה תהיה:

$$D_h f(a) = \nabla f(1,1,1) \cdot h = 1.056$$

תרגילים נוספים

1. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות (בכל נקודה בהן הן מוגדרות):

א) $f(x,y)=x^3+3y^2-\frac{x}{y}$.

ב) $f(x,y)=e^{\cos(xy)}$.

ג) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

ד) $f(x,y,z)=\ln\left(x^3+y^3-z^3\right)$.

2. בדקו את דיפנציאביליות הפונקציות הבאות במישור:

א) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

ב) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

ג) $f(x,y)=\ln\left(x^4+y^6+1\right)$.

ד) $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\frac{y^2}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

3. נגדיר משטח ב־$\mathbb{R}^3$ על ידי: $z=x^2+y^2$.

מצאו נקודה על משטח זה, שבה המישור המשיק למשטח מאונך לוקטור $(1,1,-2)$.

4. נגדיר משטח ב־$\mathbb{R}^3$ על ידי: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ עבור $a>0$. בנקודה P על המשטח מעבירים מישור משיק למשטח. מישור זה חותך את ציר ה־x בנקודה P_x, את ציר ה־y בנקודה P_y ואת ציר ה־z בנקודה P_z. הוכיחו שהסכום:

$$\|P_x\|+\|P_y\|+\|P_z\|$$

הוא קבוע ומצאו אותו (כביטוי של a, מן הסתם).

5. חשבו את הנגזרות של f בכיוון הוקטור h בנקודה a.

א) $f(x,y)=x\sin(x+y)$, $h=(-1,0)$, $a=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

ב) $f(x,y,z)=xy^2z^3$, $h=(4,3,0)$, $a=(3,2,1)$.

6. תהי f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$. נגדיר:

$$h\left(x,y\right)=\begin{cases} f\left(x,y\right) & xy>0 \\ 0 & xy\leq 0 \end{cases}$$

הוכיחו שאם $f\left(0,0\right)=f_x\left(0,0\right)=f_y\left(0,0\right)=0$ אז h דיפרנציאבילית ב־ $(0,0)$.

7. תהיינה f,g פונקציות דיפרנציאביליות בנקודה $(0,0)$. נגדיר:

$$h\left(x,y\right)=\begin{cases} f\left(x,y\right) & xy>0 \\ g\left(x,y\right) & xy\leq 0 \end{cases}$$

הוכיחו שאם מתקיים:

$f\left(0,0\right)=g\left(0,0\right)$, $f_x\left(0,0\right)=g_x\left(0,0\right)$ וגם $f_y\left(0,0\right)=g_y\left(0,0\right)$ אז h דיפרנציאבילית ב־ $(0,0)$.

פתרונות

1. כאשר גוזרים לפי משתנה מסוים - מתייחסים אל האחרים כאל קבועים.

(א) נגזור לפי x:

$$f_x\left(x,y\right)=3x^2-\frac{1}{y}$$

והיא מוגדרת כאשר $y\neq 0$.

נגזור לפי y:

$$f_y\left(x,y\right)=6y+\frac{x}{y^2}$$

והיא מוגדרת כאשר $y\neq 0$.

(ב) נגזור לפי x:

$$f_x\left(x,y\right)=e^{\cos(xy)}\sin\left(xy\right)y$$

ובאופן דומה נגזור לפי y:

$$f_y\left(x,y\right)=e^{\cos(xy)}\sin\left(xy\right)x$$

ושתי הנגזרות מוגדרות בכל $\mathbb{R}^2$.

(ג) נגזור לפי x:

$$f_x\left(x,y\right)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ובאופן דומה הנגזרות לפי z,y הן:

$$f_z\left(x,y\right)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},f_y\left(x,y\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ושלוש הנגזרות מוגדרות בכל $\mathbb{R}^3$ למעט $(0,0,0)$.

(ד) נגזור לפי x:

$$f_x\left(x,y\right)=\frac{3x^2}{x^3+y^3-z^3}$$

ובאופן דומה הנגזרות לפי z,y הן:

$$f_z\left(x,y\right)=\frac{-3z^2}{x^3+y^3-z^3},f_y\left(x,y\right)=\frac{3y^2}{x^3+y^3-z^3}$$

ובהתחשב בתחום ההגדרה של $\ln$, הן מוגדרות בתחום $x^3+y^3-z^3>0$.

2. נבדוק את רציפות הפונקציה ורציפות הנגזרות החלקיות. אם הפונקציה לא רציפה, האי אינה דיפרנציאבילית. מצד שני, אם הנגזרות החלקיות רציפות הפונקציה דיפרנציאבילית. אם ניוותר ללא הכרעה, נבדוק דיפרנציאביליות לפי ההגדרה.

(א) כאשר $(x,y)\neq(0,0)$ הפונקציה רציפה (מכפלה, חיבור וכו' של רציפות). נבדוק האם הנגזרות החלקיות רציפות. נגזור לפי x:

$$f_x\left(x,y\right)=\frac{3x^2\left(x^2+y^2\right)-2x\left(x^3+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

נגזור לפי y:

$$f_y\left(x,y\right)=\frac{4y^3\left(x^2+y^2\right)-2y\left(x^3+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{4x^2y^3+2y^5-2x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

וכאשר $(x,y)\neq(0,0)$ הנגזרות רציפות ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית.

כאשר $(x,y)=(0,0)$, f רציפה מכיוון שמתקיים:

$$0\leq\left|\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{y^4}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^3}{x^2}\right|+\left|\frac{y^4}{y^2}\right|=|x|+\left|y^2\right|$$

$0\longrightarrow\left|y^2\right|+|x|$ כאשר $(0,0)\longrightarrow(x,y)$, ולכן לפי סנדוויץ' גם:

$$f(x,y)\longrightarrow(0,0)$$

נחשב את הנגזרות החלקיות בנקודה:

$$f_x(0,0)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{\frac{t^3}{t^2}-0}{t}=1$$

$$f_y(0,0)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{\frac{t^4}{t^2}-0}{t}=\lim_{t\longrightarrow0}t=0$$

נבדוק דיפרנציאביליות לפי ההגדרה:

$$f(h_1,h_2)=f(0,0)+h_1+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

ולכן, נבדוק האם:

$$\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow0}\frac{\frac{h_1^3+h_2^4}{h_1^2+h_2^2}-h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

אם נתקדם לאורך המסלול $h_1=h_2$ נקבל:

$$=\lim_{h_1\longrightarrow0}\frac{h_1^4-h_1^3}{(2h_1^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{8}}\left(\frac{h_1^4}{|h_1^3|}-\frac{h_1^3}{|h_1^3|}\right)$$

לביטוי $\frac{h_1^4}{|h_1^3|}$ יש גבול ולביטוי $\frac{h_1^3}{|h_1^3|}$ אין גבול ולכן בסה"כ הגבול לא קיים. בפרט, הגבול אינו שווה ל־0 ולכן הפונקציה אינה דיפרנציאבילית כאשר ב־$(0,0)$.

(ב) כאשר $(x,y)\neq(0,0)$, הפונקציה רציפה. נחשב את הנגזרות החלקיות:

$$f_x(x,y)=\frac{3x^2\sqrt{x^2+y^2}-\frac{2x\left(x^2-y^2\right)}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{2x^4+3x^2y^2-xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_y(x,y)=\frac{-2y\sqrt{x^2+y^2}-\frac{2y\left(x^2-y^2\right)}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{-2x^2y-y^3-x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

שתי הנגזרות רציפות ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית כאשר $(x,y)\neq(0,0)$.

כאשר, $(x,y)=(0,0)$ הפונקציה רציפה מכיוון שמתקיים:

$$0\leq\left|\frac{x^3-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\left|\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|+\left|\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\left|\frac{x^3}{\sqrt{x^2}}\right|+\left|\frac{y^2}{\sqrt{y^2}}\right|=\left|x^2\right|+|y|$$

$\left|x^2\right|+|y|\longrightarrow 0$ כאשר $(x,y)\longrightarrow(0,0)$ ולכן לפי סנדוויץ' גם $f(x,y)\longrightarrow$ $(0,0)$.

נחשב את הנגזרות החלקיות הנקודה:

$$f_x(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\frac{t^3}{\sqrt{t^2}}-0}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{t^2}{|t|}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\frac{-t^2}{\sqrt{t^2}}-0}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}-\frac{t}{|t|}$$

הגבול הזה לא קיים. לכן, $f_y(0,0)$ לא קיימת ולכן f אינה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

(ג) הפונקציה רציפה. נחשב את הנגזרות החלקיות:

$$f_x(x,y)=\frac{4x^3}{x^4+y^6+1}$$

$$f_y(x,y)=\frac{6y^5}{x^4+y^6+1}$$

הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות בכל $\mathbb{R}^2$ ולכן f דיפרנציאבילית בכל $\mathbb{R}^2$.

(ד) ראשית, נבדוק דיפרנציאביליות בנקודות $x\neq 0$.

הפונקציה רציפה. הנגזרות החלקיות הן:

$$f_x(x,y)=\sin\frac{y^2}{x}-x\cos\frac{y^2}{x}\cdot\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)=\sin\frac{y^2}{x}-\frac{y^2}{x}\cos\frac{y^2}{x}$$

$$f_y(x,y)=x\cos\frac{y^2}{x}\cdot\frac{2y}{x}=2y\cos\frac{y^2}{x}$$

הנגזרות החלקיות רציפות כאשר $x \neq 0$ ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודות אלה.

כעת, נבדוק דיפרנציאביליות בנקודות $x = 0$.

הפונקציה רציפה, מכיוון ש:

$$0 \leq \left| x \sin \frac{y^2}{x} \right| \leq |x|$$

$|x| \longrightarrow 0$ כאשר $x \longrightarrow 0$ ולכן גם $f(x,y) \longrightarrow 0$.

נחשב את הנגזרות החלקיות:

$$f_x(0, y_0) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(t, y_0) - f(0, y_0)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{t \sin \frac{y_0^2}{t}}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \sin \frac{y_0^2}{t}$$

$$f_y(0, y_0) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(0, t + y_0) - f(0, y_0)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

כאשר $y_0 \neq 0$, הגבול $\lim_{t \longrightarrow 0} \sin \frac{y_0^2}{t}$ אינו קיים ולכן f_x לא קיימת והפונקציה אינה דיפרנציאבילית.

כאשר $y_0 = 0$, $\lim_{t \longrightarrow 0} \sin \frac{y_0^2}{t} = 0$ נבדוק דיפרנציאביליות לפי ההגדרה:

$$f(h_1, h_2) = o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right)$$

לכן, נבדוק האם:

$$\lim_{h_1^2 + h_2^2 \longrightarrow 0} \frac{h_1 \sin \frac{h_2^2}{h_1}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

נחלק למקרים.

בצורת התקדמות שבה $\frac{h_2^2}{h_1} \longrightarrow 0$,

$$\lim_{h_1^2 + h_2^2 \longrightarrow 0} \frac{h_1 \sin \frac{h_2^2}{h_1}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{h_1^2 + h_2^2 \longrightarrow 0} \frac{h_1 \cdot \frac{h_2^2}{h_1}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \cdot \frac{\sin \frac{h_2^2}{h_1}}{\frac{h_2^2}{h_1}} = \lim_{h_1^2 + h_2^2 \longrightarrow 0} \frac{h_1 \cdot \frac{h_2^2}{h_1}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$= \lim_{h_1^2 + h_2^2 \longrightarrow 0} \frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \lim_{h_1^2 + h_2^2 \longrightarrow 0} \frac{h_2^2}{\sqrt{h_2^2}} = 0$$

כלומר כאשר $|h_1| > h_2^2$ אכן יש התכנסות ל-0.

בצורת התקדמות בה $|h_1| = h_2^2$,

$$\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0} \frac{h_1 \sin \frac{h_2^2}{h_1}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0} \frac{h_2^2}{\sqrt{h_2^4+h_2^2}} \leq \lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0} \frac{h_2^2}{\sqrt{h_2^2}} = 0$$

ובצורת התקדמות בה $|h_1| < h_2^2$ קיים $m > 0$ עבורו:

$$\frac{h_2^2}{h_1} > m$$

ולכן:

$$\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0} \frac{h_1 \sin \frac{h_2^2}{h_1}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0} \frac{h_1}{\sqrt{h_2^4+h_2^2}} = \lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{h_2^2}{h_1^2}}} \leq$$

$$\leq \lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{m}{|h_1|}}} = 0$$

לפיכך, בכל צורה בה נתקדם הגבול אכן יהיה 0 ולכן f דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

לכאורה אפשר לדבר על מסלול בו מדי פעם $|h_1| > h_2^2$ ומדי פעם להיפך, אך בתכלס אנו מסתכלים על סדר גודל.

3. המישור המשיק למשטח בנקודה (x_0, y_0, z_0) מאונך לגרדיאנט של:

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$$

שהוא:

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0) = (2x_0, 2y_0, -1)$$

נחפש נקודה בה הגרדיאנט פונה באותו הכיוון של $(1, 1-2)$, כלומר:

$$(2x_0, 2y_0, -1) = t \cdot (1, 1-2)$$

מהקוארדינטה האחרונה נקבל ש$-\frac{1}{2} = t$ ולכן $x_0 = y_0 = \frac{1}{4}$. נציב זאת במשוואת המשטח כדי לקבל את z_0:

$$z_0 = x_0^2 + y_0^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

ובסה"כ $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right) = (x_0,y_0,z_0)$.

4. הגרדיאנט של הפונקציה המתארת את המשטח הוא:

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)$$

לכן המישור המשיק בנקודה (x_0,y_0,z_0) הוא:

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\left(x-x_0\right)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}\left(y-y_0\right)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}\left(z-z_0\right)=0$$

נציב $y=z=0$ כדי למצוא את נקודת החיתוך עם ציר ה$-x$:

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\left(x-x_0\right)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}\left(0-y_0\right)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}\left(0-z_0\right)=0$$

$$\frac{x}{2\sqrt{x_0}}-\frac{\sqrt{x_0}}{2}-\frac{\sqrt{y_0}}{2}-\frac{\sqrt{z_0}}{2}=0$$

מכיוון שהנקודה נמצאת על המשטח, היא מקיימת את משוואותו, כלומר:

$$\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}$$

ולכן:

$$\frac{x}{2\sqrt{x_0}}-\frac{\sqrt{a}}{2}=0$$

ובסה"כ $x=\sqrt{a}\sqrt{x_0}$, כלומר נקודת החיתוך עם ציר ה$-x$ היא:

$$P_x=\left(\sqrt{a}\sqrt{x_0},0,0\right)$$

באופן דומה, נקבל שנקודות החיתוך עם ציר ה$-y$ וציר ה$-z$ הן:

$$P_y=\left(0,\sqrt{a}\sqrt{y_0},0\right),P_z=\left(0,0,\sqrt{a}\sqrt{z_0}\right)$$

ולכן:

$$\|P_x\|+\|P_y\|+\|P_z\|=\sqrt{a}\sqrt{x_0}+\sqrt{a}\sqrt{y_0}+\sqrt{a}\sqrt{z_0}=$$

שוב מכיוון שהנקודה נמצאת על המשטח, $\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}$ ולכן:

$$\|P_x\|+\|P_y\|+\|P_z\|=\sqrt{a}\left(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}\right)=a$$

5. ראשית, נבדוק האם הפונקציות דיפרנציאביליות; אם הן אכן כאלו, נשתמש בדרך הפשוטה לחישוב נגזרת כיוונית.

(א) הפונקציה רציפה בכל $\mathbb{R}^2$. הנגזרות החלקיות הן:

$$f_x\left(x,y\right)=\sin\left(x+y\right)+x\cos\left(x+y\right)$$

$$f_y\left(x,y\right)=x\cos\left(x+y\right)$$

הנגזרות החלקיות רציפות ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית. אם כך:

$$D_hf\left(a\right)=\nabla f\left(a\right)\cdot h$$

במקרה שלנו:

$$f_x\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}=1,f_y\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}=0$$

לכן $(1,0) = \nabla f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$. $h=(-1,0)$ ולכן:

$$D_hf\left(a\right)=(1,0)\cdot(-1,0)=-1$$

(ב) f רציפה והנגזרות החלקיות:

$$f_x=y^2z^3,f_y=2xyz^3,f_z=3xy^2z^2$$

רציפות גם הן ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית. בנקודה a נקבל:

$$\nabla f\left(3,2,1\right)=\left(2^2\cdot1^3,2\cdot3\cdot2\cdot1^3,3\cdot3\cdot2^2\cdot1^2\right)=\left(4,12,36\right)$$

ננרמל את וקטור הכיוון:

$$\frac{h}{\|h\|}=\frac{h}{\sqrt{4^2+3^2}}=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},0\right)$$

ולכן:

$$D_hf\left(a\right)=\left(4,12,36\right)\cdot\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},0\right)=\frac{52}{5}$$

6. f דיפרנציאבילית ב$-\left(0,0\right)$ ולכן אפשר לכתוב:

$$f\left(t_1,t_2\right)=f\left(0,0\right)+f_x\left(0,0\right)t_1+f_y\left(0,0\right)t_2+o\left(\|t\|\right)$$

כלומר:

$$f\left(t_1,t_2\right)=o\left(\|t\|\right)$$

ולכן מתקיים:

$$\lim_{(t_1,t_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{f\left(t_1,t_2\right)}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}=0$$

כעת, לפי הגדרת h מתקיים:

$$h\left(0,0\right)=0$$

וגם:

$$h_x\left(0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{h\left(t,0\right)-h\left(0,0\right)}{t}=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{0-0}{t}=0$$

$$h_y\left(0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{h\left(0,t\right)-h\left(0,0\right)}{t}=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{0-0}{t}=0$$

נבדוק דיפרנציאביליות לפי ההגדרה:

$$h\left(t_1,t_2\right)=h\left(0,0\right)+h_x\left(0,0\right)t_1+h_y\left(0,0\right)t_2+o\left(\|t\|\right)$$

כלומר: $h\left(t_1,t_2\right)=o\left(\|t\|\right)$, ולכן נבדוק האם:

$$\lim_{(t_1,t_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{h\left(t_1,t_2\right)}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}=0$$

נשים לב לכך ש: $h\left(t_1,t_2\right)\le f\left(t_1,t_2\right)$ (כי $h=f$ או $h=0$) ולכן:

$$0\le\lim_{(t_1,t_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{h\left(t_1,t_2\right)}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}\le\lim_{(t_1,t_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{f\left(t_1,t_2\right)}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}=0$$

ואכן h דיפרנציאבילית.

7. נגדיר שתי פונקציות:

$$T\left(x,y\right)=h\left(x,y\right)-g\left(x,y\right),S\left(x,y\right)=f\left(x,y\right)-g\left(x,y\right)$$

S היא פונקציה דיפרנציאבילית כהפרש של פונקציות דיפרנציאביליות ובנוסף מתקיים:

$$S\left(0,0\right)=S_{x}\left(0,0\right)=S_{y}\left(0,0\right)=0$$

כמו כן,

$$T\left(x,y\right)=\begin{cases} S\left(x,y\right) & xy>0\\ 0 & xy\leq0 \end{cases}$$

לפי השאלה הקודמת, T דיפרנציאבילית ב- $\left(0,0\right)$ ולכן גם h דיפרנציאבילית ב- $\left(0,0\right)$ כסכום של פונקציות דיפרנציאביליות, $h=T+g$.

5 דיפרנציאלים, כלל השרשרת וטורי טיילור

5.1 דיפרנציאל

הגדרה 5.1 תהי $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית (לא נתעסק כאן במקרים אחרים) בנקודה $x=\left(x_{1},\ldots,x_{n}\right)$. לכן, אפשר לכתוב:

$$f\left(x+h\right)-f\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n}f_{x_{i}}\left(x\right)h_{i}+o\left(\left\Vert h\right\Vert \right)$$

ולכן:

$$f\left(x+h\right)-f\left(x\right)\approx\sum_{i=1}^{n}f_{x_{i}}\left(x\right)h_{i}$$

הביטוי $\sum_{i=1}^{n}f_{x_{i}}\left(x\right)h_{i}$ נקרא **הדיפרנציאל** של f, ונסמנו ב- df.

בעזרת הדיפרנציאל אפשר לקרב את ערכה של הפונקציה; כבר ראיתם באינפי 1 איך לעשות זאת עבור פונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

הרעיון הוא לחפש נקודה קרובה בה אנו יודעים את ערך הפונקציה, ובעזרתה ובעזרת הדיפרנציאל לקרב את הערך שאנו רוצים.

תרגיל:

תוך שימוש בדיפרנציאל, קרבו את הביטוי $\sin 29^\circ \tan 46^\circ$.

פתרון:

אנו כמובן צריכים לעבוד ברדיאנים, כלומר:

$$29^\circ = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}, 46^\circ = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{180}$$

לכן, הנקודה הקרובה היא מן הסתם $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ והפונקציה היא:

$$f\left(x,y\right) = \sin x \tan y$$

והפונקציה אכן דיפרנציאבילית בנקודה, מה שמאפשר להשתמש בדיפרנציאל.

השינויים בין הנקודה הקרובה לנקודה שלנו הם: $h_1 = -\frac{\pi}{180}, h_2 = \frac{\pi}{180}$ ולכן:

$$f\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}, \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{180}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) + f_x\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) + f_y\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$$

הנגזרות הן:

$$f_x\left(x,y\right) = \cos x \tan y, f_y\left(x,y\right) = \frac{\sin x}{\cos^2 y}$$

ולכן:

$$f_x\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, f_y\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

כמו כן, $f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ ובסך הכל:

$$\sin 29^\circ \tan 46^\circ \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) + \frac{\pi}{180} \approx \frac{1}{2}$$

נשאלת השאלה: מה נעשה עבור פונקציה וקטורית $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$?

נשים לב שכל פונקציה כזו, בעצם מורכבת מ־$m-$ פונקציות סקלריות, כל אחת של n משתנים:

$$f\left(x_1,...,x_n\right)=\left(f_1\left(x_1,...,x_n\right),...,f_m\left(x_1,...,x_n\right)\right)$$

הגדרה 5.2 2 תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ פונקציה.

נסמן: $f\left(x_1,...,x_n\right)=\left(f_1\left(x_1,...,x_n\right),...,f_m\left(x_1,...,x_n\right)\right)$ כאשר כל f_i היא פונקציה סקלרית.

נגדיר את מטריצת יעקובי להיות:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & . & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & . & . & . & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

היעקוביאן הוא הדטרמיננטה של מטריצת היעקובי.

את מטריצת היעקובי של f בנקודה a נסמן $D_a\left(f\right)$ או $J_f\left(a\right)$ (גם $J_a\left(f\right)$, למשל; העיקר שמבינים מי הנקודה ומי הפונקציה).

משפט 5.3 תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ פונקציה. f דיפרנציאבילית אם ורק אם כל אחת מהפונקציות f_i (כמו בהגדרה האחרונה) הן דיפרנציאביליות. לכן, לא נידרש להגדרה ה"ישירה" של דיפרנציאביליות של פונקציה וקטורית (אפילו לא הזכרנו אותה).

אם f דיפרנציאבילית בנקודה a אזי:

$$df_a(h)=J_f(a)h$$

מטריצת היעקובי היא מטריצה חשובה בעלת שימושים רבים במתמטיקה.

5.2 כלל השרשרת

<u>תזכורת:</u>

תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות כך ש$-g$ גזירה בנקודה x ו$-f$ גזירה בנקודה $g\left(x\right)$.

אזי:

$$\left(f\circ g\right)'\left(x\right)=f'\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)$$

זהו **כלל השרשרת**. איך נכליל אותו למימדים גבוהים?

משפט 5.4 תהי $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $\left(x_{1},\ldots x_{n}\right)$, כאשר כל אחד מהמשתנים הוא פונקציה דיפרנציאבילית $x_{i}:\mathbb{R}^{m}\to\mathbb{R}$ בנקודה $\left(u_{1},\ldots u_{m}\right)$ בעצמו:

$$f=f\left(x_{1}\left(u_{1},\ldots u_{m}\right),\ldots,x_{n}\left(u_{1},\ldots,u_{m}\right)\right)$$

כלומר, פונקציה מורכבת. אזי:

$$\frac{\partial f}{\partial u_{i}}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_{j}}\cdot\frac{\partial x_{j}}{\partial u_{i}}$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את הנגזרת $\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=1}$, כאשר: $w\left(x,y,z\right)=x^{3}y^{2}z^{4}$, וכאשר:

$$x=t^{2},y=t+2,z=2t^{4}$$

<u>פתרון:</u>

נשים לב שאפשר לעשות זאת לפי כלל השרשרת, ואפשר לעשות זאת על ידי הצבה של x,y,z כפונקציות של t בפונקציה w (ואפשר גם לעשות אקסטרפולציית ריצ'רדסון, למשל, אבל פחות).

אם כן, כל הפונקציות דיפרנציאביליות והכל בסדר, ולפי כלל השרשרת:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} =$$

$$= 3x^2y^2z^4 \cdot 2t + 2x^3yz^4 \cdot 1 + 4x^3y^2z^3 \cdot 8t^3 =$$

כאשר $t = 1$, $x = 1, y = 3, z = 2$ ולכן:

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=1} = 864 + 96 + 2304 = 3264$$

כמו שציינו, אפשר להציב ולקבל:

$$w(t) = \left(t^2\right)^3 \cdot (t+2)^2 \cdot \left(2t^4\right)^4 = 16t^{22} \cdot (t+2)^2$$

לגזור כמו בתיכון (או ביסודי, כל אחד וקורות חייו) ולהציב $t = 1$.

שוב, נשאלת השאלה: מה לגבי פונקציה וקטורית?

משפט 5.5 תהי $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה a ו־$f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית בנקודה $g(a)$, אזי:

$$J_a(f \circ g) = J_{g(a)}(f) \cdot J_a(g)$$

<u>תרגיל:</u>

מצאו את $dg_a(h)$ עבור $g = \phi \circ f$, $a = (1,1)$, $h = (3,2)$ כאשר:

$$f(x,y) = \left(x^2 + xy + 1, y^2 + 2\right)$$

$$\phi(u,v) = \left(u + v, 2u, v^2\right)$$

פתרון:

כל הרכיבים של שתי הפונקציות דיפרנציאביליים (כי הנגזרות החלקיות שלהם קיימות ורציפות), ולכן שתי הפונקציות דיפרנציאביליות וניתן להפעיל את כלל השרשרת.

$$J_\phi\left(u,v\right)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 2v\end{pmatrix}$$

$$J_f\left(x,y\right)=\begin{pmatrix}2x+y & x\\ 0 & 2y\end{pmatrix}$$

שימו לב שאנו מחליפים את הסימונים מדי פעם (פעם הנקודה למטה ופעם הפונקציה למטה); כמו שהסברנו, זה לא קריטי כל עוד זוכרים מי הנקודה ומי הפונקציה.

בנקודה $(1,1)$ מתקיים $f\left(1,1\right)=\left(3,3\right)$ ולכן סה"כ נקבל:1

$$J_g\left(a\right)=J_\phi\left(f\left(a\right)\right)J_f\left(a\right)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 6 & 2\\ 0 & 12\end{pmatrix}$$

ומכיוון שהפונקצייה דיפרנציאבילית:

$$dg_a\left(h\right)=J_g\left(a\right)h=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 6 & 2\\ 0 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\frac{1}{2}\\ 19\\ 6\end{pmatrix}$$

תרגיל:

חשבו את מטרצית יעקובי בנקודה $(0,0)$ של הפונקציה $g=f\circ\phi$ כאשר:

$$\phi\left(x,y\right)=\left(\frac{1}{2}\left(e^y+\cos x\right),\frac{1}{2}\left(e^x+\cos y\right)\right)$$

ונתון ש$-f$ דיפרנציאבילית בנקודה $(1,1)$ ומטריצת יעקובי שלה בנקודה היא $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

<u>פתרון:</u>

שוב, קל לראות שהנגזרות החלקיות של כל הרכיבים קיימות ורציפות ולכן ϕ דיפרנציאבילית.

$\phi(0,0)=(1,1)$ ונתון ש$-f$ דיפרנציאבילית בנקודה $(1,1)$ ולכן ניתן להפעיל את כלל השרשרת בנקודה $(0,0)$.

$$J_g(0,0)=J_f(1,1)\,J_\phi(0,0)=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sin 0 & e^0 \\ e^0 & -\sin 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

האם דיפרנציאביליות היא לא תנאי חזק מדי לכלל השרשרת? על פניו, נראה שקיום הנגזרות החלקיות מספיק. בדוגמה הבאה נראה שלא כך הוא:

$x=2t, y=t$ ו:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

עבור $t=0$, למשל, $x=y=0$ והנקודה המתאימה היא $(0,0)$.

הנגזרות החלקיות קיימות בנקודה (ושוות ל-0). לפי כלל השרשרת:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0)=f_x(0,0)\cdot\frac{dx}{dt}(0)+f_y(0,0)\cdot\frac{dy}{dt}(0)$$

אפשר לראות ש: $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ ולכן:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0)=0$$

אך אם נסתכל על f כעל פונקציה של משתנה יחיד:

$$f(x,y)=f(2t,t)=\frac{4t^2\cdot t}{4t^2+t^2}=\frac{4}{5}t$$

ולכן: $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{4}{5}$ ובפרט:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0) = \frac{4}{5} \neq 0$$

זאת מכיוון שהפונקציה אינה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$, ולכן תנאי כלל השרשרת אינם מתקיימים.

5.3 דיפרנציאלים מסדר גבוה

הגדרה 5.6 תהי $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ פונקציה. הדיפרנציאל מסדר n של הפונקציה הוא:

$$d_a^n f(x_1,...,x_m) = \sum_{\alpha_1+...+\alpha_m=n} \frac{n!}{\alpha_1!\cdot...\cdot\alpha_m!}\cdot\frac{\partial^n f}{\partial^{\alpha_1}x_1...\partial^{\alpha_m}x_m}(a)\cdot dx_1^{\alpha_1}\cdot...\cdot dx_m^{\alpha_m}$$

<u>תרגיל:</u>

תהי $f(x,y) = e^x\cos y$. חשבו את $d^3_{(0,0)}f, d^3_{(0,\frac{\pi}{2})}f$.

<u>פתרון:</u>

נחשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה עד לסדר 3. מסדר 1:

$$f_x = e^x\cos y$$

$$f_y = -e^x\sin y$$

מסדר 2:

$$f_{xx} = e^x\cos y$$

$$f_{xy} = -e^x\sin y$$

$$f_{yy} = -e^x\cos y$$

ומסדר 3:

$$f_{xxx}=e^{x}\cos y$$

$$f_{xxy}=-e^{x}\sin y$$

$$f_{yyx}=-e^{x}\cos y$$

$$f_{yyy}=e^{x}\sin y$$

לפי הנוסחה לדיפרנציאל בנקודה $(0,0)$:

$$\frac{3!}{3!0!}f_{xxx}\left(0,0\right)h_1^3+\frac{3!}{2!1!}f_{xxy}\left(0,0\right)h_1^2h_2+\frac{3!}{1!2!}f_{yyx}\left(0,0\right)h_1h_2^2+\frac{3!}{3!0!}f_{yyy}\left(0,0\right)h_2^3$$

כאשר הסימון הוא $h_i=dx_i$.

בנקודה $(0,0)$שלנו:

$$f_{xxx}\left(0,0\right)=1$$

$$f_{xxy}\left(0,0\right)=0$$

$$f_{xyy}\left(0,0\right)=-1$$

$$f_{yyy}\left(0,0\right)=0$$

נקבל:

$$d^3_{(0,0)}f = h_1^3 - 2h_1h_2^2$$

בנקודה $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$f_{xxx} = 0, f_{xxy} = -1, f_{xyy} = 0, f_{yyy} = 1$$

ולכן:

$$d^3_{(0,0)}f = h_2^3 - 2h_1^2h_2$$

5.4 פולינום טיילור וטור טיילור

הגדרה 5.7 תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית. **פיתוח טיילור** של הפונקציה סביב הנקודה $a = (a_1, \ldots, a_n)$ הוא:

$$f(x) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \frac{\partial^{k_1} \ldots \partial^{k_n}}{\partial^{k_1} x_1 \ldots \partial^{k_n} x_n} f(a) \cdot \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{k_i}$$

כלומר, המקדם של האיבר $(x_1 - a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x_n - a_n)^{k_n}$ הוא $\frac{1}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \frac{\partial^{k_1} \ldots \partial^{k_n}}{\partial^{k_1} x_1 \ldots \partial^{k_n} x_n} f(a)$.

סימנו: $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

פיתוח מקלורן הוא פיתוח טיילור סביב הנקודה 0, כלומר:

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \frac{\partial^{k_1} \ldots \partial^{k_n}}{\partial^{k_1} x_1 \ldots \partial^{k_n} x_n} f(0) \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i}$$

פיתוח עד סדר מסוים, למשל m, הוא פולינום הנקרא **פולינום טיילור מסדר** m של הפונקציה, ופשוט לוקחים את הסכומים עד ל־m, כלומר:

$$f(x) \approx P_m(f, x) = \sum_{k_1=0}^{m} \ldots \sum_{k_n=0}^{m} \frac{1}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \frac{\partial^{k_1} \ldots \partial^{k_n}}{\partial^{k_1} x_1 \ldots \partial^{k_n} x_n} f(a) \cdot \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{k_i}$$

תרגיל:

מצאו את פולינום טיילור עד סדר 2 של $f\left(x,y\right)=\sqrt{x^2+y^2}$ מסביב לנקודה $(1,0)$.

פתרון:

נחשב את הנגזרות מסדר 1:

$$f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ומסדר 2:

$$f_{xx}=\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{xy}=\frac{-xy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{yy}=\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

בנקודה שלנו, נקבל:

$$f_x\left(1,0\right)=1, f_y\left(1,0\right)=0$$

$$f_{xx}\left(1,0\right)=0, f_{xy}\left(1,0\right)=0, f_{yy}\left(1,0\right)=1$$

$$f\left(1,0\right)=1$$

ולכן פולינום הטיילור יהיה:

$$f\left(x,y\right)\approx 1+\left(x-1\right)+\frac{1}{2}y^2$$

משפט 5.8 תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית. פיתוח טיילור של הפונקציה (מכל סדר) הוא יחיד.

המשפט נראה די ברור, אך יש לו השלכה פרקטית חשובה. אם מוצאים פיתוח של פונקציה לטור - בדרך כלל על ידי טורים מוכרים של פונקציות במשתנה בודד - אנו יודעים שזהו פיתוח טיילור של הפונקציה, מכיוון שפיתוח כזה, לפי המשפט, הוא יחיד.

זה יכול לחסוך הרבה עבודה - למי יש כוח לגזור עוד ועוד?

<u>תרגיל:</u>

חשבו את פולינום טיילור של $f\left(x,y\right)=e^{x^2}\sin 2y$ סביב הנקודה $\left(0,0\right)$ עד סדר 5.

<u>פתרון:</u>

נזכור ש:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

עד סדר 5 נקבל:

$$e^{x^2}\approx 1+x^2+\frac{x^4}{2!}$$

באופן דומה, בעזרת הטור של $\sin y$:

$$\sin y=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\cdot\frac{y^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}$$

נקבל שעד סדר 5:

$$\sin 2y\approx 2y-\frac{\left(2y\right)^3}{3!}+\frac{\left(2y\right)^5}{5!}$$

ולכן פולינום הטיילור יהיה:

$$e^{x^2}\sin 2y\approx\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}\right)\left(2y-\frac{\left(2y\right)^3}{3!}+\frac{\left(2y\right)^5}{5!}\right)$$

אנו רוצים עד סדר 5, ולכן נפתח את הביטוי ונעיף כל איבר מסדר גבוה יותר. האיברים שיעופו הם:

$$x^2 \cdot \frac{(2y)^5}{5!}, \frac{x^4}{2!} \cdot \left(-\frac{(2y)^3}{3!}\right), \frac{x^4}{2!} \cdot \frac{(2y)^5}{5!}$$

ולכן, פיתוח טיילור עד סדר 5 הוא:

$$e^{x^2} \sin 2y \approx 2y + 2yx^2 - \frac{(2y)^3}{3!} + \frac{x^4}{2!} \cdot 2y - x^2 \cdot \frac{(2y)^3}{3!} + \frac{(2y)^5}{5!}$$

אנו יודעים שזהו אכן פיתוח טיילור, מכיוון שהפיתוח הוא יחיד.

<u>תרגיל:</u>

תהי $f(x,y) = e^{x^2y^3}$.

1. כתבו פיתוח טיילור של f סביב $(0,0)$ עד סדר 19.

<u>פתרון:</u>

שוב, נזכור את הפיתוח של e^x ונקבל עד סדר 19:

$$e^{x^2y^3} = 1 + x^2y^3 + \frac{x^4y^6}{2!} + \frac{x^6y^9}{3!}$$

האיבר הבא יהיה כבר במעלה גבוהה מ-19.

2. מהי $\frac{\partial f}{\partial x^8 \partial y^{11}}(0,0)$?

<u>פתרון:</u>

מכיוון שבפיתוח הטיילור שלנו אין איבר ממעלה 19, ובפרט האיבר x^8y^{11} לא נמצא, ברור ש:

$$\frac{\partial f}{\partial x^8 \partial y^{11}}(0,0) = 0$$

הערה 5.9 אחד משימושיו העיקריים של פיתוח טיילור הוא קירובים, והשתמשנו בכך רבות כשדיברנו על פיתוח טיילור של פונקציה במשתנה יחיד. נושא מהותי היה השארית - מהו ההבדל בין הפונקציה לפיתוח בכל סדר? גם במקרה של כמה משתנים אפשר לשאול את השאלה, וגם כאן יש לנו סוגים שונים של שארית (פיאנו, לגראנז'). לא נתעסק בכך בקורס הזה. שארית לגראנז' של פיתוח עד סדר m בנקודה a היא מהצורה:

$$R_{a,k}\left(h\right)=\sum_{k_1+\cdots+k_n=m+1}\frac{1}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_n!}\cdot\frac{\partial^{k_1}\ldots\partial^{k_n}}{\partial^{k_1}x_1\ldots.\partial^{k_n}x_n}f\left(a+ch\right)\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(x_i-a_i\right)^{k_i}$$

כאשר $c\in\left(0,1\right)$ כלשהו.

השארית היא תמיד o של זנב הטור, ובנוסחת פיאנו נכתוב: $R_{a,k}=o\left(\left\|x-a\right\|^{m+1}\right)$.

שוב, אין צורך לדעת זאת בקורס שלנו.

תרגילים נוספים

1. חשבו את $\frac{dw}{dt}$, כאשר: $w=\ln\left(3x^2-2y+4z^3\right)$ וכאשר:

$$x=\sqrt{t},y=t^{\frac{2}{3}},z=\frac{1}{t^2}$$

2. חשבו את $J_{g\circ f}\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)$ כאשר:

$$f\left(x,y,z\right)=\left(x^2\sin y,\frac{x}{z},z\cos y\right),g\left(x,y,z\right)=\left(x^4z^2,x^2\ln 2y,xyz\right)$$

3. בעזרת דיפרנציאל, חשבו בקירוב: $\sqrt{1.02^3+1.97^3}$.

4. תהי $g\left(t\right)$ פונקציה של משתנה אחד, גזירה ברציפות k פעמים בקטע פתוח $I\subseteq\mathbb{R}$ עבורו $0\in I$. נגדיר:

$$f\left(x,y\right)=g\left(x+y\right)$$

הוכיחו כי:

$$d^k_{(0,0)}f\left(x,y\right)=g^{(k)}\left(0\right)\left(x+y\right)^k$$

5. כתבו את פיתוח טיילור של $f\left(x,y\right)=\sin\left(xe^y\right)$ סביב הנקודה $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ עד סדר 2.

6. כתבו את פיתוח טיילור של $f\left(x,y\right)$ סביב הנקודה $\left(1,1\right)$ עד סדר 2, כאשר:

   (א) $f\left(x,y\right)=x^y$.

   (ב) $f\left(x,y\right)=\frac{x}{y}$.

7. כתבו את פיתוח טיילור לפונקציה $f\left(x,y\right)=\frac{1}{1-x^2y}$ סביב הנקודה $\left(0,0\right)$, ומצאו בעזרתו את:

$$\frac{\partial^6 f}{\partial x^4\partial y^2}\left(0,0\right)$$

פתרונות

1. לפי כלל השרשרת:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}$$

במקרה שלנו:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{6x}{3x^2-2y+4z^3}\cdot\frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}}-\frac{2}{3x^2-2y+4z^3}\cdot\frac{2}{3t^{\frac{1}{3}}}-\frac{12z^2}{3x^2-2y+4z^3}\cdot\frac{2}{t^3}$$

ואחרי שנציב את x,y,z כביטויים של t נקבל:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{9t^{\frac{1}{3}}-4-72t^{-\frac{20}{3}}}{9t^{\frac{4}{3}}-6+12t^{-\frac{17}{3}}}$$

2. הפונקציות דיפרנציאביליות היכן שאנו רוצים ולכן לפי כלל השרשרת:

$$J_{g\circ f}\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)=J_g\left(f\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)\right)\cdot J_f\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)$$

ולכן: $f\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$

$$J_g\left(f\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)\right)=\begin{pmatrix}4x^3z^2 & 0 & 2x^4z\\ 2x\ln 2y & \frac{x^2}{y} & 0\\ yz & xz & xy\end{pmatrix}\Bigg|_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{4}\end{pmatrix}$$

$$J_f\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)=\begin{pmatrix}2x\sin y & x^2\cos y & 0\\ \frac{1}{z} & 0 & -\frac{x}{z^2}\\ 0 & -z\sin y & \cos y\end{pmatrix}\Bigg|_{\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)}=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\\ 0 & -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

לכן:

$$J_{g\circ f}\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)=\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\\ 0 & -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\\ \frac{3}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

3. הפונקציה שלנו תהיה:

$$f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$$

והנקודה הקרובה תהיה $(1,2)$. נשים לב ש־f אכן דיפרנציאבילית בנקודה.
השינויים בערכי הנקודה הם $h_1=0.02, h_2=-0.03$ ולכן:

$$f(1.02,1.97)\approx f(1,2)+f_x(1,2)\cdot 0.02+f_y(1,2)\cdot(-0.03)$$

כעת:

$$f_x(1,2)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\Bigg|_{(1,2)}=\frac{1}{2}$$

$$f_y(1,2) = \left.\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\right|_{(1,2)} = 2$$

בנוסף, $f(1,2)=3$ ובסך הכל:

$$\sqrt{1.02^3+1.97^3} = 3+\frac{1}{2}\cdot 0.02-2\cdot 0.03 = 2.95$$

4. לפי הנוסחה לדיפרנציאל:

$$d^k_{(0,0)}f(x,y) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!}\cdot\frac{\partial^k f}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}(0,0)\,x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}$$

במקרה שלנו:

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) = g'(x+y)$$

לכן:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}(x,y) = g^{(k)}(x,y)$$

לפיכך:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}(0,0) = g^{(k)}(0)$$

נציב ונקבל:

$$d^k_{(0,0)}f(x,y) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!}\cdot g^{(k)}(0)\,x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}$$

$g^{(k)}(0)$ הוא ביטוי קבוע ביחס לסכום ולכן אפשר לשלוף אותו החוצה מהסכום:

$$d^k_{(0,0)}f(x,y) = g^{(k)}(0)\cdot\sum_{\alpha_1+\alpha_2=k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!}\cdot x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}$$

ומנוסחת הבינום של ניוטון נקבל שאכן:

$$d^k_{(0,0)}f(x,y) = g^{(k)}(0)\cdot\sum_{\alpha_1+\alpha_2=k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!}\cdot x^{\alpha_1}y^{\alpha_2} = g^{(k)}(0)\,(x+y)^k$$

5. נחשב את הנגזרות עד סדר 2:

$$f_x = \cos\left(xe^y\right)e^y, f_y = \cos\left(xe^y\right)xe^y$$

$$f_{xx} = -\sin\left(xe^y\right)e^{2y}, f_{yy} = xe^y\cos\left(xe^y\right) - \sin\left(xe^y\right)x^2e^{2y}$$

$$f_{xy} = -\sin\left(xe^y\right)xe^{2y} + \cos\left(xe^y\right)e^y$$

שימו לב שמדובר על מכפלת פונקציות. נציב את הנקודה שלנו ונקבל:

$$f\left(\frac{\pi}{2},0\right) = 1$$

$$f_x\left(\frac{\pi}{2},0\right) = f_y\left(\frac{\pi}{2},0\right) = 0$$

$$f_{xx}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = -1, f_{xy}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = -\frac{\pi}{2}, f_{yy}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = -\frac{\pi^2}{4}$$

ולכן הפיתוח הוא:

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}\left(-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 - \pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)y - \frac{\pi^2}{4}y^2\right) + o\left(\|(x,y)\|^2\right)$$

6. נשתמש בכל מקרה בטכניקה שונה.

(א)

$$f_x = yx^{y-1}, f_y = x^y\ln x$$

$$f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, f_{yy} = x^y\ln^2 x, f_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$$

נציב את הנקודה שלנו ונקבל:

$$f(1,1) = 1$$

$$f_x(1,1) = 1, f_y(1,1) = 0$$

$$f_{xx}(1,1) = f_{yy}(1,1) = 0, f_{xy} = 1$$

ולכן הפיתוח הוא:

$$f(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1)$$

(ב) נכתוב את הפונקציה בצורה הבאה:

$$f(x,y) = \frac{x-1+1}{y-1+1} = (x-1)\cdot\frac{1}{1+(y-1)} + \frac{1}{1+(y-1)}$$

נשתמש בטור הנדסי אינסופי שכולנו ראינו בגיל ינקות:

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

עבור $|q| < 1$. במקרה שלנו, $|y-1| < 1$ ולכן:

$$\frac{1}{1+(y-1)} = \frac{1}{1-(-(y-1))} = \sum_{n=0}^{\infty}(-(y-1))^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (y-1)^n$$

ולכן:

$$f(x,y) = (x-1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (y-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (y-1)^n$$

כלומר:

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (y-1)^n \cdot ((x-1)+1)$$

נציב n מתאים כדי לקבל את הסדר הנדרש.

שימו לב שגם כאן אפשר פשוט לחשב את הנגזרות החלקיות ולהציב בנוסחה.

7. הפונקציה שלנו היא בעצם טור הנדסי אינסופי:

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x^2y} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(x^2y\right)^n$$

כי בסביבת הנקודה $(0,0)$, $\left|x^2y\right| < 1$.

לכן, עד סדר 8:

$$f(x,y) \approx 1 + x^2y + x^4y^2$$

האיבר הבא כבר ממעלה 12. מיחידות פיתוח טיילור נקבל:

$$1 \cdot x^4y^2 = \frac{1}{6!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{\partial^6 f}{\partial x^4 \partial y^2}(0,0) \cdot x^4y^2$$

ולכן:

$$\frac{\partial^6 f}{\partial x^4 \partial y^2}(0,0) = 4! \cdot 2! = 48$$

6 נקודות קיצון

אנו ממשיכים להכליל את מה שלמדנו באינפי 1 ובאינפי 2 על פונקציות של משתנה יחיד לפונקציות של כמה משתנים, ובמיוחד פונקציות סקלריות ודיפרנציאביליות $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

נקודות קיצון הן מאפיינים חשובים של הפונקציה.

איך מצאנו נקודות קיצון של פונקציה של משתנה יחיד? היו לנו שני שלבים עיקריים, אי־אז בבית הספר היסודי:

1. פותרים את המשוואה $f'(x) = 0$.

2. בכל אחד מהפתרונות בודקים את הסימן של f''. אם היא חיובית זוהי נקודת מינימום, אם היא שלילית זוהי נקודת מקסימום, ואם היא שווה ל־0 זו נקודת פיתול.

הערה 6.1 יש לסייג מעט ולומר שאם $f'' = 0$ אין הדבר אומר בהכרח שזו נקודת פיתול, אלא צריך לבדוק את הנגזרת השלישית, ואם גם זו מתאפסת את הרביעית וכן הלאה (אם הנגזרת הראשונה שאינה מתאפסת היא מסדר זוגי זו נקודת קיצון ואם מסדר אי־זוגי זו נקודת פיתול), אך ברוב המקרים אכן כך הוא.

כמו כן, הייתה לנו דרך נוספת לבדוק את סוג הנקודה - תחומי עלייה וירידה. זוהי בדיקה "ידנית" - בודקים האם הפונקציה אכן מקיימת בסביבת הנקודה את מה שנדרש כדי שזו תהיה נקודת קיצון.

איך נשליך זאת על פונקציות של כמה משתנים?

1. במקום לפתור את המשוואה $f'=0$, נפתור את המערכת: $\nabla f=0$.

פתרונות המשוואה נקראים **נקודות קריטיות**.

כדי להחליט מהו סוג הנקודה, אנו צריכים מבחן הכולל את הנגזרות השניות. בפונקציה עם n משתנים, יש לנו n^2 נגזרות שניות (חלקן זהות).

הגדרה 6.2 תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית. **מטריצת הסה** או **ההסיאן** של f מוגדרת על ידי:

$$H\left(f\right)=\begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

כלומר, זו מטריצת הנגזרות השניות: $\left(H\left(f\right)\right)_{ij}=f_{x_ix_j}$.

שימו לב שמכיוון שהפונקציה דיפרנציאבילית, לכל $1\leq i,j\leq n$ מתקיים: $f_{x_ix_j}=f_{x_jx_i}$, ולכן H מטריצה סימטרית.

אנו קובעים את סוג הנקודה כך:

2. אם המטריצה חיובית לחלוטין, הנקודה היא נקודת מינימום. אם המטריצה שלילית לחלוטין, הנקודה היא נקודת מקסימום. אחרת, הנקודה נקראת **נקודת אוכף**.

יש לנו שתי דרכים לבדוק את חיוביותה של המטריצה.

דרך א': בעזרת הערכים העצמיים. אם כולם חיוביים, זו נקודת מינימום. אם כולם שליליים, זו נקודת מקסימום. אם הסימנים מעורבים, זוהי נקודת אוכף.

דרך ב': בעזרת המינורים.

משפט 6.3 קריטריון סילבסטר:

תהי $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ מטריצה סימטרית. אזי, A חיובית לחלוטין אם (ורק אם) לכל $1\le i\le n$,

$$\det\left(M_i\right)>0$$

כאשר M_i היא המטריצה מגודל $i\times i$ בפינה השמאלית העליונה של A. M_i נקראת **המינור** ה־i. במקרה כזה, הנקודה היא נקודת מינימום.

A שלילית לחלוטין, אם $\det\left(M_1\right)<0$ והמינורים מחליפים סימן, כלומר:

$$\det\left(M_i\right)\cdot\left(-1\right)^i>0$$

במקרה כזה הנקודה היא נקודת מקסימום.

אחרת, הנקודה היא נקודת אוכף.

הערה 6.4 1. במקרה בו $\det\left(M_i\right)=0$ או $\lambda_i=0$ עבור $1\le i\le n$ כלשהו, אנו מתייחסים אל הערך או אל המינור כאל כזה שלא נותן לנו מידע, ויכול להיות חיובי או שלילי.

למשל, אם בנקודה מסוימת הערכים העצמיים הם $0,1,2,2$, אנו לא יודעים אם זו נקודת מינימום או אוכף (זו בוודאי לא נקודת מקסימום כי יש ערכים עצמיים חיוביים).

לעומת זאת, אם הערכים העצמיים הם $0,1,2,-6$ אנו יודעים שזו נקודת אוכף מכיוון שיש ערכים עצמיים חיוביים וערך עצמי שלילי.

במצב בו באמת לא ניתן להכריע בעזרת ההסיאן (למשל ע"ע $0,1,2,2$ כמו שהזכרנו), נבדוק את סוג הנקודה "ידנית", בדומה לבדיקת עלייה וירידה בפונקציה של משתנה יחיד.

כלומר, כדי להראות שהנקודה היא נקודת מינימום יש להראות שבכל מסלול שבו נתקדם אל הנקודה, הפונקציה תרד, ולהיפך עבור נקודת מקסימום.

כדי להראות שנקודה היא נקודת אוכף, נחפש מסלול בו הפונקציה עולה אל הנקודה ומסלול בו היא יורדת אליה. בתרגילים הנוספים יש תרגילים כאלו.

יש לציין שספק אם תיתקלו במקרים כאלה, ואם כן הנקודה תהיה נקודת אוכף (ויש להראות מסלולים שונים בהם הפונקציה עולה ויורדת כמו שהסברנו).

2. אנו מתייחסים כאן אל המטריצה מגודל $i \times i$ בפינה השמאלית העליונה כאל המינור ה$-i$.

לעומת זאת, כאשר נדבר על המינור ה$-ij$ הכוונה היא למטריצה שהורדנו ממנה את השורה ה$-i$ והעמודה ה$-j$ (כמו בחישוב דטרמיננטה, למשל).

<u>תרגיל:</u>

מצאו את הנקודות הקריטיות של הפונקציות הבאות וסווגו אותן.

1. $u(x,y,z) = 3x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 2z + 1$

<u>פתרון:</u>

נשווה את הגרדיאנט ל-0 ונקבל את המערכת:

$$u_x = 9x^2 + 6y = 0$$

$$u_y = 2y + 6x = 0$$

$$u_z = 2z - 2 = 0$$

שפתרונה הן הנקודות: $(2,-6,1)\,,(0,0,1)$. מטריצת ההסיאן היא:

$$H_u = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} \\ u_{yx} & u_{yy} & u_{yz} \\ u_{zx} & u_{zy} & u_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

בנקודה $(0,0,1)$, נקבל שהמינור השני הוא $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} < 0$ ולכן זו לא נקודת מינימום ולא נקודת מקסימום, כלומר זו נקודת אוכף.

בנקודה $(2,-6,1)$, נקבל שכל המינורים חיוביים:

$$\det(M_1) = \det(M_2) = 36, \det(M_3) = 72$$

ולכן זו נקודת מינימום.

2. $u\left(x,y\right)=3\left(x^{2}+y^{2}\right)+x^{3}+4y$.

<u>פתרון:</u>

נשווה את הגרדיאנט ל־0 ונקבל את המערכת:

$$u_{x}=6x+3x^{2}=0$$

$$u_{y}=6y+4=0$$

לכן הנקודות החשודות לקיצון הן $\left(0,-\frac{2}{3}\right),\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$.

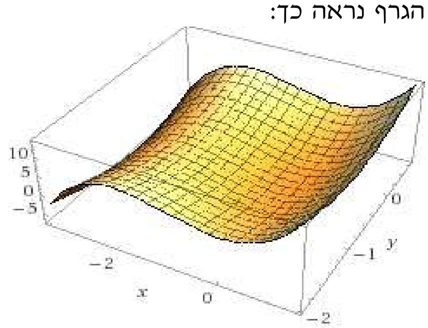
מטריצת ההסיאן היא:

$$H_{u}=\begin{pmatrix}u_{xx} & u_{xy}\\ u_{yx} & u_{yy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+6x & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

בנקודה $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ נקבל ששני הערכים העצמיים חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.

בנקודה $\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$ נקבל שערך עצמי אחד חיובי והשני שלילי (± 6) ולכן זו נקודת אוכף.

הגרף נראה כך:



<u>תרגיל:</u>

מצאו נקודות קריטיות עבור הפונקציה הבאה וסווגו אותן:

$$f(x,y,z)=x^{4}+y^{4}+z^{4}-2a^{2}(x^{2}+y^{2}+z^{2})$$

כאשר $a > 0$.

<u>פתרון:</u>

בנוהל, נשווה את הגדיאנט ל־0:

$$f_x = 4x^3 - 4a^2x = 0$$

$$f_y = 4y^3 - 4a^2y = 0$$

$$f_z = 4z^3 - 4a^2z = 0$$

ונקבל שהפתרונות מקיימים $x, y, z \in \{0, a, -a\}$, כלומר יש 27 נקודות קריטיות (בחירה של 3 איברים מתוך 3 עם חשיבות לסדר ועם חזרה, 3^3).

מטריצת ההסיאן היא:

$$H_f = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2 - 4z^2 \end{pmatrix}$$

עבור הנקודה $(0, 0, 0)$, נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} -4a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה שלילית לחלוטין ולכן הנקודה $(0, 0, 0)$ היא נקודת מקסימום.

עבור נקודות מהצורה $(\pm a, 0, 0)$ נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה עם ערך עצמי חיובי ושניים שליליים ולכן הנקודות הן נקודות אוכף.

באופן דומה, גם הנקודות $(0, \pm a, 0), (0, 0, \pm a)$ הן נקודות אוכף.

עבור נקודות מהצורה $(\pm a, \pm a, 0)$ נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה עם ערך עצמי אחד שלילי ושניים חיוביים, ולכן הנקודות הן נקודות אוכף.

באופן דומה, גם הנקודות $(\pm a, 0, \pm a), (0, \pm a, \pm a)$ הן נקודות אוכף.

בנקודות מהצורה $(\pm a, \pm a, \pm a)$ נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8a^2 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה חיובית לחלוטין ולכן אלו נקודות מינימום.

<u>תרגיל:</u>

מצאו נקודות קיצון מקומיות עבור הפונקציה:

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$$

האם אלו נקודות קיצון גלובאליות?

<u>פתרון:</u>

נשווה את הגרדיאנט ל-0:

$$f_x = 3e^y - 3x^2 = 0$$

$$f_y = 3xe^y - 3e^{3y} = 0$$

מהמשוואה הראשונה, $x^2 = e^y$. נזכור ש: $e^{3y} = (e^y)^3$, נציב במשוואה השנייה ונקבל:

$$3x \cdot x^2 - 3\left(x^2\right)^3 = 0 \Longrightarrow x = 0, 1$$

אם $x = 0$, $e^y = 0^2 = 0$ ואין פתרון.

אם $x = 1$, $e^y = 1$ ולכן $y = 0$, כלומר הנקודה הקריטית היא $(1, 0)$.

$$H_f = \begin{pmatrix} -6x & 3e^y \\ 3e^y & 3xe^y - 9e^{3y} \end{pmatrix}$$

ובנקודה $(1, 0)$ שלנו:

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

המינורים מקיימים:

$$\det(M_1) = -6 < 0, \det(M_2) = 27 > 0$$

ולכן זו נקודת מקסימום.

מבחינה גלובאלית, אין לפונקציה נקודות קיצון; הערך בנקודה שלנו הוא:

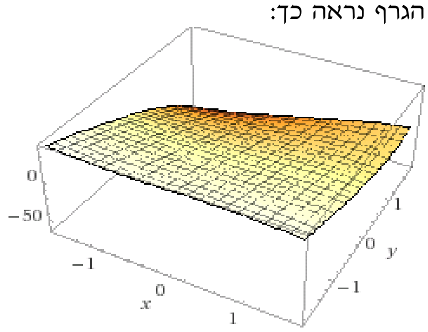
$$f(1, 0) = 2$$

אך למשל בנקודה $(-10, 0)$ נקבל את הערך:

$$f(-10, 0) = 969 > 2$$

ולכן אין נקודות קיצון גלובאליות.

הגרף נראה כך:



<u>תרגיל:</u>

מצאו את המינימום והמקסימום הגלובאליים של

$$f\left(x,y\right)=x^{2}+y^{2}-xy-2x-2y$$

במשולש שקודקודיו הם הנקודות $\left(0,6\right),\left(6,0\right),\left(0,0\right)$.

<u>פתרון:</u>

נעשה זאת בשלבים.

שלב ראשון ־ נחפש נקודות חשודות בתוך התחום.

שלב שני ־ נסתכל על הפונקציה שלנו כעל פונקציה של משתנה אחד על כל אחת מהצלעות ונחפש כך נקודות חשודות על הצלעות.

שלב שלישי ־ גם הקודקודים עצמם חשודים כקיצון (הם ה"קצוות של הקצוות"). נבדוק את כל הנקודות החשודות ונראה מי מהן המקסימום ומי המינימום.

נשווה את הגרדיאנט ל־0:

$$f_{x}=2x-y-2=0$$

$$f_{y}=2y-x-2=0$$

ונקבל נקודה חשודה $\left(2,2\right)$.

כעת, נתבונן בצלעות המשולש. בצלע $y=0$, נחקור את הפונקציה:

$$f\left(x,0\right)=x^{2}-2x$$

נגזור ונשווה ל-0, ונקבל $x=1$, כלומר הנקודה היא $\left(1,0\right)$.

באופן דומה, על הצלע $x=0$, נקבל כנקודה חשודה את הנקודה $\left(0,1\right)$.

משוואתה של הצלע השלישית היא $y=6-x$, ולכן נחקור את הפונקציה:

$$f\left(x,6-x\right)=x^{2}+\left(6-x\right)^{2}-x\left(6-x\right)-2x-2\left(6-x\right)$$

כלומר:

$$f\left(x,6-x\right)=3x^{2}-18x+24$$

נגזור ונשווה ל-0, ונקבל $x=3$, כלומר הנקודה $\left(3,3\right)$ חשודה.

כמו כן, אמרנו ששלושת הקודקודים הם נקודות חשודות.

נבדוק מה ערך הפונקציה בכל אחת מהנקודות החשודות שלנו:

$$f\left(0,6\right)=f\left(6,0\right)=24$$

$$f\left(0,0\right)=0$$

$$f\left(2,2\right)=-4$$

$$f\left(1,0\right)=f\left(0,1\right)=-1$$

$$f\left(3,3\right)=-3$$

ולכן $(0,6),(6,0)$ הן נקודות מקסימום גלובאלי והנקודה $(2,2)$ היא נקודת מינימום גלובאלי.

תרגילים נוספים

1. מצאו נקודות קריטיות עבור הפונקציות הבאות וסווגו אותן:

(א) $f(x,y)=(x-1)^2-2y^2$.

(ב) $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

(ג) $f(x,y)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$, כאשר $a,b>0$.

2. נתבונן בפונקציה:

$$f(x,y)=\left(y-3x^2\right)\left(y-x^2\right)$$

(א) הוכיחו שהנקודה $(0,0)$ היא נקודה קריטית.

(ב) הוכיחו כי ל־f יש מינימום מקומי לאורך כל קו ישר העובר דרך הראשית.

כלומר, אם נגדיר $g(t)=(at,bt)$ עבור $a,b\in\mathbb{R}$, לפונקציה $f\circ g$ יש מינימום מקומי בנקודה $(0,0)$.

(ג) הוכיחו שהנקודה $(0,0)$ אינה נקודת מינימום של f.

פתרונות

1. א. הגרדיאנט הוא:

$$\nabla f=(2(x-1),-4y)$$

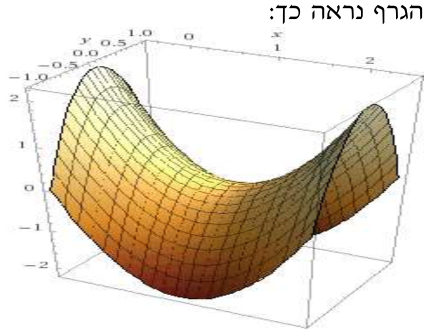
והוא מתאפס רק בנקודה $(1,0)$.

מטריצת הסה היא:

$$H=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה מעורבת (ע"ע אחד חיובי והשני שלילי) ולכן הנקודה היא נקודת אוכף.

הגרף נראה כך:



ב. הגרדיאנט הוא:

$$\nabla f=\left(4x^3-4x+4y,4y^3-4y+4x\right)$$

נקבל מערכת משוואות:

$$\begin{cases} x^3-x+y=0 \\ y^3-y+x=0 \end{cases}$$

נסכום את המשוואות ונקבל: $x^3+y^3=0$, כלומר $x=-y$.

נציב זאת באחת מהמשוואות:

$$x^3-2x=0$$

ולכן $x=0$ או $x=\pm\sqrt{2}$, ולכן הנקודות הקריטיות הן:

$$(0,0)\,,\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

מטריצת הסה היא:

$$H=\begin{pmatrix} 12x^2-4 & 4 \\ 4 & 12y^2-4 \end{pmatrix}$$

בנקודה $(0,0)$:

$$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה לא הפיכה ולכן לא ניתן לקבוע את סוג הנקודה בעזרת מטריצת הסה.

נבדוק את סוג הנקודה בדרכים אחרות.

נשים לב שמתקיים:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

אם נתקדם אל הנקודה לאורך $x = y$ נקבל:

$$f(x,x) = x^4 + x^4 \geq 0$$

ואם נתקדם לאורך $y = 0$ נקבל:

$$f(x,0) = x^4 - 2x^2$$

נחקור פונקציה זו כפונקציה של משתנה אחד:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right)$$

ולכן $x = 0$ נקודה קריטית. נגזור שנית:

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

ולכן $f''(0) = -4 < 0$ ולכן $x = 0$ נקודת מקסימום לאורך הישר $y = 0$ (אפשר גם לבדוק תחומי עלייה וירידה).

בנקודה $(0,0)$ עצמה מתקיים: $f(0,0) = 0$.

מההתקדמות לאורך $x = y$ נקבל שהנקודה אינה נקודת מקסימום, ומההתקדמות לאורך $y = 0$ נקבל שהנקודה אינה נקודת מינימום.

לכן, זו נקודת אוכף.

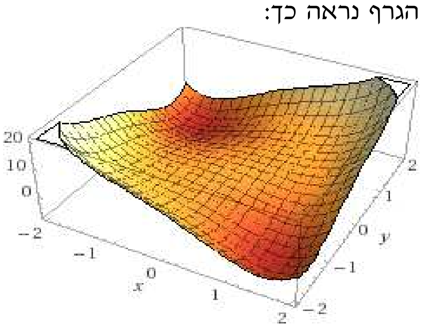
בנקודות $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$:

$$H_{\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)} = H_{\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

המינור הראשון מקיים: $M_1 = 20 > 0$.

המינור השני מקיים: $M_2 = 400 - 16 > 0$, ולכן לפי סילבסטר, אלו נקודות מינימום.

הגרף נראה כך:



ג. האמת היא שזה די ארוך, לא חשבתי על זה לפני ששמתי את זה כתרגיל.

הגדריאנט הוא $\nabla f = (f_x, f_y)$:

$$f_x = y\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} + xy \cdot \frac{-2 \cdot \frac{x}{a^2}}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = \frac{y - \frac{2x^2y}{a^2} - \frac{y^3}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

$$f_y = \frac{x - \frac{x^3}{a^2} - \frac{2y^2x}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

אנו בודקים מתי הגדריאנט מתאפס, כלומר מתי המונים שווים ל־0:

$$y - \frac{2x^2y}{a^2} - \frac{y^3}{b^2} = 0, x - \frac{x^3}{a^2} - \frac{2y^2x}{b^2} = 0$$

נחלק למקרים. אם $x, y \neq 0$ אפשר לצמצם ב־x, y ולקבל:

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{b^2} = 1 - \frac{2x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

כלומר:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

ולכן $x = \pm\frac{ay}{b}$. נציב זאת באחת המשוואות ונקבל:

$$1 - \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^2}{b^2} = 0$$

ולכן $y=\pm\frac{b}{\sqrt{3}}$. לכן, אם לא מסתכלים על הצירים (שהרי אנו במקרה בו $x,y\neq 0$), נקבל 4 נקודות קריטיות:

$$\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}},\pm\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$$

כעת נבדוק מה קורה על הצירים.

ברור שהנקודה $(0,0)$היא נקודה קריטית.

אם $x=0$ אך $y\neq 0$ נקבל:

$$y-\frac{2x^2y}{a^2}-\frac{y^3}{b^2}=0\Longrightarrow y-\frac{y^3}{b^2}=0\Longrightarrow y=\pm b$$

באופן דומה, אם $y=0$ אך $x\neq 0$ נקבל:

$$x=\pm a$$

אבל הנקודות שתתקבלנה הן :

$$\left(\pm a,0\right),\left(0,\pm b\right)$$

והן לא נמצאות בתחום אותו בדקנו.

לפיכך, יש לנו בסך הכל 5 נקודות קריטיות:

$$\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}},\pm\frac{b}{\sqrt{3}}\right),\left(0,0\right)$$

ראשית, נבדוק את הראשית. ברור ש:

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}>0$$

בסביבת הנקודה בכל התחום שלנו.

אם נתקדם לאורך $x=y$ נקבל:

$$f\left(x,x\right)=x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}>0$$

ואם נתקדם לאורך $x=-y$ נקבל:

$$f\left(x,-x\right)=-x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}<0$$

ולכן זו לא נקודת מינימום ולא נקודת מקסימום, כלומר זו נקודת אוכף.

עבור הנקודות האחרות, אתם יכולים לגזור פעמיים ולחשב את ההסיאן בנקודה. אני אמסור הודעה למשפחות.

מצד שני, אפשר להסתמך על העובדות הבאות מאינפי 1:

1. אם $f(x_0)>0$ אז x_0 מקסימום מקומי של f אם ורק אם היא מקסימום מקומי של f^2.
2. אם $f(x_0)>0$ אז x_0 מינימום מקומי של f אם ורק אם היא מינימום מקומי של f^2.
3. אם $f(x_0)<0$ אז x_0 מינימום מקומי של f אם ורק אם היא מקסימום מקומי של f^2.
4. אם $f(x_0)<0$ אז x_0 מקסימום מקומי של f אם ורק אם היא מינימום מקומי של f^2.

לכן, מספיק לחקור את:

$$g=f^2=x^2y^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)=x^2y^2-\frac{x^4y^2}{a^2}-\frac{x^2y^4}{b^2}$$

נחשב את מטריצת הסה:

$$g_x=2xy^2-\frac{4x^3y^2}{a^2}-\frac{2xy^4}{b^2},g_y=2x^2y-\frac{2x^4y}{a^2}-\frac{4x^2y^3}{b^2}$$

$$g_{xx}=2y^2-\frac{12x^2y^2}{a^2}-\frac{2y^4}{b^2},g_{yy}=2x^2-\frac{2x^4}{a^2}-\frac{12x^2y^2}{b^2},g_{xy}=4xy-\frac{8x^3y}{a^2}-\frac{8xy^3}{b^2}$$

ולכן המטריצה היא:

$$H=\begin{pmatrix} 2y^2-\frac{12x^2y^2}{a^2}-\frac{2y^4}{b^2} & 4xy-\frac{8x^3y}{a^2}-\frac{8xy^3}{b^2} \\ 4xy-\frac{8x^3y}{a^2}-\frac{8xy^3}{b^2} & 2x^2-\frac{2x^4}{a^2}-\frac{12x^2y^2}{b^2} \end{pmatrix}$$

נבדוק את הנקודות הקריטיות:

$$H_{\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right)}=\begin{pmatrix} -\frac{8b^2}{9} & -\frac{4ab}{9} \\ -\frac{4ab}{9} & -\frac{8a^2}{9} \end{pmatrix}$$

המינור הראשון הוא: $M_1=-\frac{8b^2}{9}<0$.

המינור השני הוא: $M_2=\frac{64a^2b^2}{81}-\frac{16a^2b^2}{81}=\frac{48a^2b^2}{81}>0$. לכן לפי סילבסטר הנקודה היא

נקודת מקסימום של g.

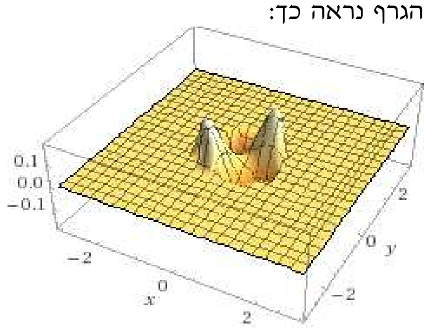
באופן דומה, עבור כל אחת מהנקודות הקריטיות האחרות נקבל את אותם המינורים ולכן כולן נקודות מקסימום של g, כלומר של f^2.

נשתמש בעובדות שהזכרנו.

נשים לב שמתקיים: $f\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right), f\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right) > 0$ ולכן אלו נקודות מקסימום של f.

נשים לב שמתקיים: $f\left(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right), f\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right) < 0$ ולכן אלו נקודות מינימום של f.

הגרף נראה כך:



עבור $a,b=1$.

2. בעצם, התרגיל מראה שלהיות קיצון לאורך כל הישרים לא מספיק להיות קיצון.

א. הנגזרות החלקיות הן:

$$f_x = -6x\left(y-x^2\right) - 2x\left(y-3x^2\right), f_y = \left(y-x^2\right) + \left(y-3x^2\right)$$

ואכן הנקודה $(0,0)$ מאפסת את שתי הנגזרות החלקיות ולכן היא נקודה קריטית.

ב. ההרכבה היא הפונקציה:

$$f\circ g\,(t) = f\,(at,bt) = \left(bt-3a^2t^2\right)\left(bt-a^2t^2\right) = 3a^4t^4 - 4a^2bt^3 + b^2t^2$$

נחקור את הפונקציה כפונקציה של מתשנה אחד. נגזור ונשווה ל-0:

$$0 = 12a^4t^3 - 12a^2bt^2 + 2b^2t = t\left(12a^4t^2 - 12a^2bt + 2b^2\right)$$

ולכן $t=0$ הוא אכן פתרון. נגזור שוב:

$$\left(f\circ g\right)''(t) = 36a^4t^2 - 24a^2bt + 2b^2$$

בנקודה $t=0$, נקבל:

$$(f\circ g)''(0)=2b^2>0$$

ולכן $t=0$ היא נקודת מינימום.

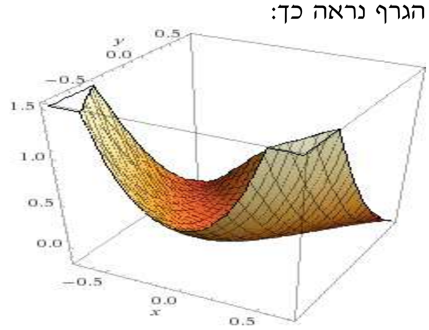
ג. אם נתקדם לאורך המסלול $y=2x^2$ (שהוא לא קו ישר) נקבל:

$$f\left(x,2x^2\right)=\left(2x^2-3x^2\right)\left(2x^2-x^2\right)=-x^4$$

לפונקציה זו יש מקסימום כאשר $x=0$ ולכן הנקודה $(0,0)$אינה מינימום.

מצד שני היא אינה מקסימום לפי הסעיף הקודם ולכן בסך הכל זו נקודת אוכף.

הגרף נראה כך:



7 משפט הפונקציה הסתומה ומשפט הפונקציה ההפוכה

7.1 מבוא

הגדרה 7.1 תהי $F(x,y)$ מוגדרת בתחום D ויהי $\Delta=[a,b]\times[c,d]$ מלבן ב־D.

נאמר שהמשוואה $F(x,y)=0$ מגדירה את y כפונקציה סתומה של x במלבן Δ, אם לכל $a\leq x\leq b$ יש y יחיד בקטע $[c,d]$ כך ש:

$$F(x,y)=0$$

<u>הקדמה:</u>

נתונה המשוואה $y+\frac{1}{2}\sin y-x=0$. האם משוואה זו מגדירה את y כפונקציה של x?

נבודד דווקא את x כפונקציה של y:

$$x=y+\frac{1}{2}\sin y$$

זו פונקציה גזירה לכל y ומתקיים:

$$x'=1+\frac{1}{2}\cos y>0$$

והפונקציה עולה לכל y. כלומר, זו פונקציה הפיכה, ולכן יש לה פונקציה הפוכה שמגדירה את y כפונקציה של x.

7.2 משפט הפונקציה הסתומה

משפט 7.2 משפט הפונקציה הסתומה - משוואה אחת ונעלם אחד:

נתונה המשוואה $F\left(x,y\right)=0$ כאשר F מוגדרת בסביבה D של הנקודה $\left(x_0,y_0\right)$.

אם $F\left(x,y\right),F_x\left(x,y\right),F_y\left(x,y\right)$ רציפות ב$-D$ ואם:

$$F\left(x_0,y_0\right)=0$$

, $F_y\left(x_0,y_0\right)\neq 0$, אז קיים מלבן:

$$\Delta=\left\{(x,y)\,|\,|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\varepsilon\right\}$$

כך שהמשוואה הנ"ל מגדירה את y כפונקציה סתומה של x ונסמן $y=f\left(x\right)$.

כמו כן, $y_0=f\left(x_0\right)$, לכל x במלבן $F_y\left(x,f\left(x\right)\right)\neq 0$ והפונקציה $y=f\left(x\right)$ גזירה ברציפות, ומתקיים:

$$\frac{df}{dx}\left(x\right)=-\frac{F_x\left(x,f\left(x\right)\right)}{F_y\left(x,f\left(x\right)\right)}$$

תרגיל:

נתונה המשוואה $x^y - y^x - y = 0$. האם המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x בסביבת הנקודה $(2,1)$?

אם כן, חשבו את $y'(2)$.

פתרון:

נגדיר $F(x,y) = x^y - y^x - y$.

F רציפה בסביבת הנקודה, הנגזרות הן:

$$F_x = yx^{y-1} - y^x \ln y$$

$$F_y = x^y \ln x - xy^{x-1} - 1$$

רציפות, ובנוסף:

$$F_y(2,1) = 2\ln 2 - 3 \neq 0$$

לכן תנאי משפט הפונקציה הסתומה מתקיימים, ולכן y מוגדרת כפונקציה של x בסביבות הנקודה $(2,1)$.

כעת, לפי המשפט:

$$y'(2) = -\frac{F_x(2,1)}{F_y(2,1)} = \frac{1}{3-\ln 4}$$

תרגיל:

נתונה המשוואה:

$$x^2 + y^2 = 25$$

כמה פונקציות $y = y(x)$ מגדירה המשוואה בקטע $-5 \leq x \leq 5$? כמה מהן רציפות?

<u>פתרון:</u>

לכל נקודה בקטע אפשר להתאים אחד מהערכים $\pm\sqrt{25-x^2}$. כלומר, מדובר על כל הפונקציות:

$$y:[-5,5]\to\left\{\pm\sqrt{25-x^2}\right\}$$

ולכן יש $2^{\aleph}$ כאלה (לכל x יש שני y אפשריים).

פונקציות רציפות יש שתיים בלבד:

$$y\left(x\right)=\sqrt{25-x^2}$$

$$y\left(x\right)=-\sqrt{25-x^2}$$

חשבו למה כל קומבינציה אחרת של $\pm\sqrt{25-x^2}$ אינה רציפה.

משפט 7.3 משפט הפונקציה הסתומה ־ משוואה אחת ב־n משתנים:

תהי משוואה $F\left(x_1,x_2\ldots,x_n,y\right)=0$ כאשר F פונקציה של $n+1$ משתנים המוגדרת בסביבה D של הנקודה $x^0=\left(x_1^0,x_2^0\ldots,x_n^0,y^0\right)$.

נניח שמתקיים $F\left(x^0\right)=0$ ובנוסף $F\in C^1\left(D\right)$ וגם $F_y\left(x^0\right)\neq 0$ אז קיימת תיבה n מימדית $\left|x_i-x_i^0\right|<\delta_i$ כך שהמשוואה מגדירה בסביבה זו את y כפונקציה סתומה של שאר המשתנים:

$$y=y\left(x_1,x_2\ldots x_n\right)$$

בנוסף, y גזירה ברציפות לפי כל אחד מהמשתנים ומתקיים:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{F_{x_i}}{F_y}$$

תרגיל:

נתונה המשוואה:

$$y^3+xz+y^2+e^z-3=0$$

הוכיחו כי המשוואה מגדירה פונקציה $z=z\left(x,y\right)$ בסביבת הנקודה $\left(1,1,0\right)$.

פתרון:

נגדיר:

$$F\left(x,y,z\right)=y^3+xz+y^2+e^z-3$$

הפונקציה הנ"ל היא סכום של פונקציות אלמנטריות לפי שלושת המשתנים ולכן $F\in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$.

אכן מתקיים: $F\left(1,1,0\right)=0$, וכן:

$$F_z\left(1,1,0\right)=x+e^z|_{(1,1,0)}=2\neq0$$

ולכן תנאי המשפט מתקיימים, והמשוואה אכן מגדירה פונקציה סתומה $z=z\left(x,y\right)$ בסביבת הנקודה $\left(1,1,0\right)$.

תרגיל:

בהמשך לתרגיל הקודם, חשבו את $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ ישירות מהמשוואה; השוו את התוצאה עם הגזירה לפי משפט הפונקציה הסתומה.

פתרון:

נתבונן במשוואה המקורית: $y^3+x\cdot z\left(x,y\right)+y^2+e^{z(x,y)}-3=0$, נגזור אותה לפי x ונקבל:

$$z\left(x,y\right)+x\cdot z_x\left(x,y\right)+z_x\left(x,y\right)\cdot e^{z(x,y)}=0$$

כלומר:

$$z_x = -\frac{z}{x+e^z}$$

באופן דומה נגזור את המשוואה לפי y ונקבל:

$$z_y = -\frac{3y^2+2y}{x+e^z}$$

מצד שני, לפי משפט הפונקציה הסתומה:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{z}{x+e^z}$$

והתוצאה אכן זהה. כך גם לגבי z_y.

<u>תרגיל:</u>

תהי $F \in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$, ונניח כי בסביבה D של נקודה (x_0, y_0, z_0) המשוואה מגדירה 3 פונקציות:

$$x = x(y,z)\,, y = y(x,z)\,, z = z(x,y)$$

חשבו את: $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$.

<u>פתרון:</u>

לפי משפט הפונקציה הסתומה:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\cdot\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\cdot\left(-\frac{F_x}{F_z}\right) = -1$$

משפט 7.4 משפט הפונקציה הסתומה - מערכת של משוואות:

ראשית, נסמן:

$$\left(\frac{\partial\left(f_1,\ldots.f_n\right)}{\partial\left(x_1,\ldots x_n\right)}\right)_{ij} = \left(f_i\right)_{x_j}$$

כאשר $f_1,\dots f_n$ הן פונקציות במשתנים $x_1,\dots x_n$. כלומר, זו מטריצה שהאיבר ה$-ij$ שלה הוא הנגזרת של הפונקציה ה$-i$ לפי המשתנה ה$-j$.

נתבונן ב$-m$ משוואות עם $n+m$ נעלמים:

$$F_i\left(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m\right)=0, 1\leq i\leq m$$

נניח שכל הפונקציות F_i גזירות ברציפות לפי כל המשתנים בסביבה D של נקודה $x^0=\left(x_1^0,\dots,x_n^0,y_1^0,\dots,y_m^0\right)$.

כמו כן, נניח ש$-0=F_i\left(x^0\right)$ לכל i והיעקוביאן בנקודה x^0 לפי המשתנים $y_1,\dots,y_m$ שונה מ-0, כלומר:

$$\left|\frac{\partial\left(F_1,\dots F_m\right)}{\partial\left(y_1,\dots y_m\right)}\right|\neq 0$$

אזי, קיימת סביבה U של x^0 כך שבסביבה זו המערכת מגדירה m פונקציות גזירות ברציפות:

$$y_k\left(x_1,\dots,x_n\right), 1\leq k\leq m$$

והנגזרת לפי משתנה מסויים נתונה ע"י:

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_j}=-\frac{\left|\frac{\partial(F_1,\dots F_m)}{\partial(y_1,\dots x_j\dots y_m)}\right|}{\left|\frac{\partial(F_1,\dots F_m)}{\partial(y_1,\dots y_m)}\right|}$$

כאשר המטריצה $\frac{\partial(F_1,\dots F_m)}{\partial(y_1,\dots x_j\dots y_m)}$ היא המטריצה $\frac{\partial(F_1,\dots F_m)}{\partial(y_1,\dots y_m)}$ בה החלפנו את עמודת הנגזרות לפי y_k בעמודת הנגזרות לפי x_j.

<u>תרגיל:</u>

נתבונן במערכת:

$$xe^{u+v}+2uv=1$$

$$ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}=2x$$

1. הוכיחו כי המערכת מגדירה פונקציות דיפרנציאביליות $u(x,y)$ ו־ $v(x,y)$, כך ש: $u(1,2)=v(1,2)=0$.

<u>פתרון:</u>

נבדוק שהמערכת מקיימת את תנאי המשפט.

נגדיר פונקציה:

$$f(x,y,u,v)=(F_1,F_2)=\left(xe^{u+v}+2uv-1,ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}-2x\right)$$

הנקודה שלנו היא $(1,2,0,0)$.

אכן מתקיים: $f(1,2,0,0)=(0,0)$.

הנגזרות לפי כל משתנה של F_1,F_2 גזירות ברציפות, ומתקיים:

$$J_f(1,2,0,0)=\begin{vmatrix}(F_1)_u & (F_1)_v\\ (F_2)_u & (F_2)_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}xe^{u+v}+2v & xe^{u+v}+2u\\ ye^{u-v}-\frac{1}{1+v} & -ye^{u-v}+\frac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}$$

ובנקודה שלנו נקבל:

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-3\neq 0$$

ולכן כל תנאי המשפט מתקיימים, ולכן המערכת מגדירה פונקציות $u(x,y)$ ו־ $v(x,y)$ גזירות ברציפות.

מכיוון שהן גזירות ברציפות הן בוודאי דיפרנציאביליות.

2. מצאו את $du(1,2)$.

<u>פתרון:</u>

נחשב את הנגזרות החלקיות של u לפי שני המשתנים. לפי x:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}(F_1)_x & (F_1)_v\\ (F_2)_x & (F_2)_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(F_1)_u & (F_1)_v\\ (F_2)_u & (F_2)_v\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}e^{u+v} & xe^{u+v}+2u\\ -2 & -ye^{u-v}+\frac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}}{-3}$$

ובנקודה שלנו:

$$=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{vmatrix}}{-3}=0$$

לפי y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}(F_1)_y & (F_1)_v\\ (F_2)_y & (F_2)_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(F_1)_u & (F_1)_v\\ (F_2)_u & (F_2)_v\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}0 & xe^{u+v}+2u\\ e^{u-v} & -ye^{u-v}+\frac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}}{-3}$$

ובנקודה שלנו:

$$=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}}{-3}=-\frac{1}{3}$$

ולכן:

$$du\,(1,2)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,2)\cdot dx+\frac{\partial u}{\partial y}(1,2)\cdot dy=-\frac{1}{3}dy$$

7.3 משפט הפונקציה ההפוכה

משפט 7.5 משפט הפונקציה ההפוכה:

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ותהי f פונקציה המוגדרת על הקבוצה, גזירה ברציפות.

תהי $a \in A$ עבורה $|J_f(a)| \neq 0$.

אזי, קיימת סביבה U של a ($U \subset A$) כך שהקבוצה $f(U)$ גם פתוחה.

בנוסף, f מעתיקה את U חח"ע על V ו־$f^{-1} : V \to U$ גם גזירה ברציפות, ומתקיים:

$$J_{f^{-1}}(f(x)) = (J_f(x))^{-1}$$

לכל $x \in U$.

במילים אחרות, אם f גזירה ברציפות והיעקוביאן לא מתאפס אז f הפיכה מקומית.

במצב כזה, מטריצת יעקובי של ההופכית היא ההופכית של מטריצת יעקובי.

<u>תרגיל:</u>

תהי:

$$f(x, y, z) = (e^x \sin z, e^y \cos z, e^z xy)$$

הוכיחו כי f הפיכה מקומית בנקודה $(0, 1, 0)$, ומצאו את מטריצת יעקובי של f^{-1} בנקודה $(0, e, 0)$.

<u>פתרון:</u>

נחשב את מטריצת היעקובי של f:

$$\begin{pmatrix} e^x \sin z & 0 & e^x \cos z \\ 0 & e^y \cos z & -e^y \sin z \\ e^z y & e^z x & e^z xy \end{pmatrix}$$

ובנקודה $(0,1,0)$ שלנו נקבל:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה הפיכה ולכן הדטרמיננטה שלה שונה מ-0.

כלומר, $J_f(0,1,0) \neq 0$ ולכן לפי משפט הפונקציה ההפוכה, נקבל ש$-f$ הפיכה מקומית בסביבת $(0,1,0)$.

מתקיים: $f(0,1,0) = (0,e,0)$.

כעת, מטריצת היעקובי של f^{-1} היא ההופכית של מטריצת היעקובי של f, כלומר:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>תרגיל:</u>

נגדיר פונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

הוכיחו כי f אינה חח"ע בכל קטע פתוח המכיל את 0.

הדרכה: הוכיחו כי לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$f\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right) > f\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)$$

$$f\left(\frac{2}{(4k+4)\pi}\right) > f\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)$$

איזה תנאי של משפט הפונקציה ההפוכה אינו מתקיים?

<u>פתרון:</u>

נוכיח את אי־השיוויון שבהדרכה:

$$f\left(\frac{2}{(4k+1)\,\pi}\right)=\frac{2}{(4k+1)\,\pi}+2\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right)^2\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{(4k+1)\,\pi}+2\left(\frac{2}{(4k+1)\,\pi}\right)^2$$

$$f\left(\frac{2}{(4k+3)\,\pi}\right)=\frac{2}{(4k+3)\,\pi}+2\left(\frac{2}{(4k+3)\,\pi}\right)^2\sin\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{2}{(4k+3)\,\pi}-2\left(\frac{2}{(4k+3)\,\pi}\right)^2$$

ומכיוון שמתקיים:

$$\frac{2}{(4k+3)\,\pi}<\frac{2}{(4k+1)\,\pi}$$

$$-2\left(\frac{2}{(4k+3)\,\pi}\right)^2<2\left(\frac{2}{(4k+1)\,\pi}\right)^2$$

נקבל שאכן:

$$f\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)<f\left(\frac{2}{(4k+1)\,\pi}\right)$$

כמו כן:

$$f\left(\frac{2}{(4k+4)\,\pi}\right)=\frac{2}{(4k+4)\,\pi}+2\left(\frac{2}{(4k+4)\,\pi}\right)^2\sin\left(2k\pi+\frac{4\pi}{2}\right)=\frac{2}{(4k+4)\,\pi}$$

כלומר נותר להוכיח ש:

$$\frac{2}{(4k+4)\,\pi}>\frac{2}{(4k+3)\,\pi}-2\left(\frac{2}{(4k+3)\,\pi}\right)^2$$

עם קצת אריתמטיקה נקבל:

$$16k+16>(4k+3)\,\pi$$

וזה אכן מתקיים, והוכחנו את אי־השיוויון.

מה נותן לנו אי־השיוויון?

בכל קטע פתוח מסביב ל-0 נקבל שהפונקציה שלנו אינה מונוטונית, כי:

$$\frac{2}{(4k+1)\,\pi} > \frac{2}{(4k+3)\,\pi} > \frac{2}{(4k+4)\,\pi}$$

אך:

$$f\left(\frac{2}{(4k+1)\,\pi}\right) > f\left(\frac{2}{(4k+3)\,\pi}\right) < f\left(\frac{2}{(4k+4)\,\pi}\right)$$

ואנו יודעים שפונקציה רציפה וחח"ע היא מונוטונית (חשבו למה), ולכן הפונקציה שלנו אינה חח"ע.

התנאי שאינו מתקיים הוא גזירות ברציפות.

אם נחשב את הנגזרת של f נקבל:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x\sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

והגבול:

$$\lim_{x \longrightarrow 0}\left(1 + 4x\sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x}\right)$$

לא קיים, ולכן הנגזרת אינה רציפה.

תרגילים נוספים

1. האם קיימת סביבה בה המשוואה $\sin x + \sinh y + 1 = 0$ מגדירה את y כפונקציה סתומה של x, $y = f(x)$?

2. הוכיחו שהמשוואות הבאות מגדירות את z כפונקציה של המשתנים x,y בסביבת הנקודה $x^0=\left(x_1^0,x_2^0,x_3^0\right)$, וחשבו את הנגזרות z_x,z_y,z_{xy} בנקודה:

(א) $F\left(x,y,z\right)=y^2+xy+z^2-e^z-4=0$ בסביבת $(0,e,2)$.

(ב) $F\left(x,y,z\right)=xz+y\ln z+x^2=0$ בסביבת $(-2,0,2)$.

3. נתונה המשוואה:

$$\sqrt{x^2+y^5+\cos z-1}-1-z^4=0$$

האם המשוואה מגדירה את z כפונקציה של x,y בסביבת הנקודה $(-1,0,0)$? את y כפונקציה של x,z? את x כפונקציה של y,z?

4. הוכיחו כי קיים כדור כלשהו $B\subseteq\mathbb{R}^4$ שמרכזו בנקודה $(2,1-1,-2)$, וקיימות פונקציות $f,g:B\to\mathbb{R}$ גזירות ברציפות עבורן:

$$f\left(2,1-1,-2\right)=4,g\left(2,1-1,-2\right)=3$$

ולכל נקודה בכדור $(x,y,z,a)\in B$ מתקיים:

$$f^2+g^2+a^2=29,\frac{f^2}{x^2}+\frac{g^2}{y^2}+\frac{a^2}{z^2}=17$$

5. הוכיחו כי המערכת:

$$\begin{cases} u+v=x+y \\ \frac{\sin u}{\sin v}=\frac{x}{y}\end{cases}$$

מגדירה פונקציות דיפרנציאביליות $u\left(x,y\right),v\left(x,y\right)$ עבורן:

$$u\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=v\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$$

6. תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת על ידי: $f\left(x,y\right)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$. הוכיחו ש-$f$ הפיכה בסביבת כל נקודה פרט לראשית $(0,0)$ וחשבו את f^{-1}.

7. הוכיחו כי הפונקציה $f(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$ הפיכה מקומית בסביבת כל נקודה אך לא הפיכה.

פתרונות

1. נסמן: $F(x,y)=\sin x+\sinh y+1$. נתבונן בכל נקודה (x_0,y_0) המקיימת את המשוואה (למשל $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$).

הנגזרות החלקיות הן:

$$F_x=\cos x, F_y=\cosh y$$

ברור שהפונקציות F,F_x,F_y גזירות ברציפות.

נשים לב שמתקיים

$$F_y\left(x_0,y_0\right)=\frac{e^{y_0}+e^{-y_0}}{2}>0$$

ובפרט $F_y\neq 0$ בנקודה.

לכן לפי המשפט קיימת סביבה (של הנקודה (x_0,y_0)) בה ניתן להציג את y כפונקציה של x.

2. נבדוק את תנאי המשפט בכל אחד מהמקרים.

(א) קל לראות שהפונקציות F,F_x,F_y,F_z גזירות ברציפות (אינסוף פעמים). הנגזרות הן:

$$F_x=y, F_y=2y+x, F_z=2z-e^z$$

ובנקודה, $F_z(0,e,2)=4-e^2\neq 0$, ולכן המשוואה מגדירה את z כפונקציה של x,y.

אם כך, בסביבת $(0,e)$מתקיים:

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{y}{e^z-2z}, z_y=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{2y+x}{e^z-2z}$$

לפיכך:

$$z_x\left(0,e\right)=\frac{e}{e^2-4},z_y\left(0,e\right)=\frac{2e}{e^2-4}$$

כעת:

$$z_{xy}=\left(z_y\right)_x=\frac{e^z-2z-\left(e^z-2\right)\cdot z_y\left(2y+x\right)}{\left(e^z-2z\right)^2}$$

ולכן:

$$z_{xy}\left(0,e\right)=\frac{2\left(e^2-4\right)-\left(e^2-4\right)\frac{2e}{e^2-4}\left(2e\right)}{\left(e^2-4\right)^2}=\frac{-2e^2-8}{\left(e^2-4\right)^2}$$

(ב) קל לראות שהפונקציות F,F_x,F_y,F_z גזירות ברציפות. הנגזרות הן:

$$F_x=z+2x,F_y=\ln z,F_z=x+\frac{y}{z}$$

ובנקודה, $F_z\left(-2,0,2\right)=-2\neq 0$. לכן המשוואה מגדירה את z כפונקציה של x,y.

אם כך, בסביבת $\left(-2,0\right)$ מתקיים:

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{z+2x}{x+\frac{y}{z}},z_y=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{\ln z}{x+\frac{y}{z}}$$

לפיכך:

$$z_x\left(-2,0\right)=-\frac{2-4}{-2}=-1,z_y\left(-2,0\right)=-\frac{\ln 2}{-2}=\frac{\ln 2}{2}$$

כעת:

$$z_{xy}=\left(z_y\right)_x=-\frac{z_y\left(x+\frac{y}{z}\right)-\left(\frac{z-yz_y}{z^2}\right)\left(z+2x\right)}{\left(x+\frac{y}{z}\right)^2}$$

ולכן:

$$z_{xy}\left(-2,0\right)=\frac{1-\ln 2}{4}$$

3. נסמן:

$$F\left(x,y,z\right)=\sqrt{x^{2}+y^{5}+\cos z-1}-1-z^{4}$$

נבדוק מהן הנגזרות:

$$F_{x}=\frac{x}{\sqrt{x^{2}+y^{5}+\cos z-1}}$$

לכן:

$$F_{x}\left(-1,0,0\right)=\frac{-1}{\sqrt{\left(-1\right)^{2}+0^{5}+\cos 0-1}}=-1\neq 0$$

ולכן המשוואה מגדירה את z כפונקציה של x,y בסביבת הנקודה.

$$F_{y}=\frac{5y^{4}}{2\sqrt{x^{2}+y^{5}+\cos z-1}}$$

לכן:

$$F_{y}\left(-1,0,0\right)=\frac{0}{\ldots}=0$$

ואי־אפשר להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה. אלא מאי? אפשר עם קצת אלגברה לחלץ מהמשוואה את y כפונקציה של x,z די בקלות:

$$y=\sqrt[5]{\left(z^{4}+1\right)^{2}-x^{2}-\cos z+1}$$

ולכן המשוואה אכן מגדירה את y כפונקציה של x,z בסביבת הנקודה.

$$F_{z}=\frac{-\sin z}{2\sqrt{x^{2}+y^{5}+\cos z-1}}-4z^{3}$$

לכן:

$$F_{z}\left(-1,0,0\right)=0$$

ואי־אפשר להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה.

נשים לב לעובדה הבאה: אם $\left(-1-\varepsilon,0,\delta\right)$ פתרון של המשוואה, גם $\left(-1-\varepsilon,0,-\delta\right)$ פתרון של המשוואה, לכל $\varepsilon,\delta>0$.

כלומר, לכל סביבה (עם רדיוס δ) של הנקודה $(-1,0,0)$ קיים $\varepsilon>0$ וערכים z_1,z_2 עבורם $(-1-\varepsilon,0,z_1)$ ו־$(-1-\varepsilon,0,z_2)$ נמצאות בסביבה ומתקיים:

$$F\left(-1-\varepsilon,0,z_1\right)=F\left(-1-\varepsilon,0,z_2\right)=0$$

ולכן המשוואה לא מגדירה את z כפונקציה של x,y בסביבת הנקודה.

4. אפשר לנסח את השאלה באופן הבא. האם המשוואות:

$$f^2+g^2+a^2=29,\frac{f^2}{x^2}+\frac{g^2}{y^2}+\frac{a^2}{z^2}=17$$

מגדירות את f,g כפונקציות של x,y,z,a בסביבת הנקודה $(2,1-1,-2,4,3)$.

לפי משפט הפונקציה הסתומה עלינו לבדוק את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} F_{1f} & F_{1g} \\ F_{2f} & F_{2g} \end{pmatrix}$$

בה"כ, $F_1=\frac{f^2}{x^2}+\frac{g^2}{y^2}+\frac{a^2}{z^2}-17$, $F_2=f^2+g^2+a^2=29$ ולכן:

$$\begin{pmatrix} F_{1f} & F_{1g} \\ F_{2f} & F_{2g} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2f & 2g \\ \frac{2f}{x^2} & \frac{2g}{y^2} \end{pmatrix}$$

ובנקודה שלנו:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

וזו מטריצה הפיכה, ולכן לפי משפט הפונקציה הסתומה מערכת המשוואות $F_1,F_2=0$ מגדירות את f,g כפונקציות של x,y,z,a בסביבת הנקודה.

5. נגדיר פונקציה $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ על ידי:

$$F\left(x,y,u,v\right)=\left(u+v-x-y,\frac{\sin u}{\sin v}-\frac{x}{y}\right)$$

נבדוק שהיא מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסתומה בנקודה $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$.

קל לראות שאכן $F\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=0$, ושהנגזרות החלקיות רציפות בסביבת הנקודה.

המטריצה מתאימה היא:

$$\begin{pmatrix} F_{1u} & F_{1v} \\ F_{2u} & F_{2v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\cos u}{\sin v} & -\frac{\sin u \cos v}{\sin^2 v} \end{pmatrix}$$

ובנקודה שלנו:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

וזו מטריצה הפיכה. לכן תנאי משפט הפונקציה הסתומה מתקיימים, ולכן המערכת אכן מגדירה פונקציות דיפרנציאביליות: $u\left(x,y\right), v\left(x,y\right)$.

6. ברור שב$-(0,0)$ הפונקציה אינה גזירה. אחרת, היעקוביאן היא:

$$|J_f| = \begin{vmatrix} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{vmatrix} = \frac{\left(y^2-x^2\right)\left(x^2-y^2\right)-4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^4} = -\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

ולכן: $|J_f| \neq 0$ ולפי משפט הפונקציה ההפוכה, הפונקציה f הפיכה מקומית בכל נקודה אחרת.

נחשב את ההופכית. נסמן:

$$(u,v) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

ונרצה למצוא את x,y כפונקציות של u,v.

אם נניח ש$-u,v \neq 0$, נוכל לכתוב: $x^2+y^2 = \frac{y}{v}$ ולכן:

$$u = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{\frac{y}{v}} \Longrightarrow x = \frac{uy}{v}$$

נציב זאת במשוואה $u = \frac{x}{x^2+y^2}$ ונקבל:

$$u = \frac{\frac{uy}{v}}{\left(\frac{uy}{v}\right)^2+y^2} = \frac{uvy}{y^2\left(u^2+v^2\right)} \Longrightarrow y = \frac{v}{u^2+v^2}$$

באופן דומה נקבל:

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}$$

כלומר,

$$f^{-1}\left(u,v\right)=\left(\frac{u}{u^2+v^2},\frac{v}{u^2+v^2}\right)$$

בדקנו רק עבור $u,v\neq 0$. כאשר $u=0$ נקבל ש־$x=0$. מכיוון שהנקודה שונה מ־$(0,0)$, נקבל ש־$v\neq 0$ וגם $y\neq 0$.

אם כן, הפונקציה f^{-1} אכן מוגדרת בכל נקודה (למעט $(0,0)$).

7. היעקוביאן היא:

$$|J_f|=\begin{vmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{vmatrix}=e^x\cos^2 y+e^x\sin^2 y=e^x\neq 0$$

ולכן לפי משפט הפונקציה ההפוכה הפונקציה הפיכה מקומית בכל נקודה.

עם זאת, הפונקציה בוודאי אינה הפיכה, מכיוון שהיא אינה חח"ע:

$$f\left(0,0\right)=f\left(0,2\pi\right)$$

8 קיצון עם אילוץ

אנו רוצים למצוא נקודת קיצון של פונקציה $f=f(x_1,\dots,x_n)$ כאשר יש לנו אילוצים:

$$g_i(x_1,\dots,x_n)=0$$

כאשר $1\leq i\leq m$.

אילוץ פירושו תנאי מסויים שהנקודה צריכה לקיים.

הגדרה 8.1 כדי לחשב למצוא קיצון שכזה, נגדיר פונקציה חדשה, עם m משתנים נוספים:

$$L=L(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i+f$$

פונקציה זו נקראת **הלגראנז'יאן**. נחפש את הקיצון של הלגראנז'יאן בשיטות שאנו מכירים - נשווה $\nabla L=0$.

הקיצון שנמצא הוא הקיצון שלנו תחת האילוצים הנתונים.

λ_i נקראים **כופלי לגראנז'**.

הערה 8.2 ישנם כמה סייגים, שנזכיר בהמשך.

<u>תרגיל:</u>

דוגמה קלה מויקיפדיה בעברית.

יש לנו פחית גלילית עם נפח V, ואנו רוצים למצוא את שטח הפנים המינימלי האפשרי לפחית כזאת.

<u>פתרון:</u>

לחישוב שטח פנים A אנו צריכים 2 משתנים - גובה הגליל ורדיוסו (מחוגו, בעברית צחה).

כלומר, נחקור את הפונקציה:

$$A\left(r,h\right)=2\pi r^{2}+2\pi rh$$

עם האילוץ:

$$V-\pi r^{2}h=0$$

הלגרנז'יאן שלנו היא:

$$L\left(r,h,\lambda\right)=2\pi r^{2}+2\pi rh+\lambda\left(V-\pi r^{2}h\right)$$

נשווה את הגרדיאנט ל-0 ונקבל:

$$L_{r}=4\pi r+2\pi h-2\lambda\pi hr=0$$

$$L_h = 2\pi r - \lambda \pi r^2$$

$$L_\lambda = V - \pi r^2 h = 0$$

ואם נפתור את המשוואות נקבל:

$$h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}, r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

נציב בפונקציה A ונקבל את שטח הפנים המינימלי.

הערה 8.3 א. כפי שהדוגמה מדגימה, אפשר לפתור בעיות מאד מציאותיות בעזרת כופלי לגראנז'.

ב. נשים לב שהנגזרות החלקיות של הלגראנז'יאן לפי המשתנים החדשים λ_j הן פשוט האילוצים.

הלגראנז'יאן עוזרת לנו להתמודד עם אילוצים מורכבים יחסית. כאשר האילוצים הם פשוטים, ניתן לפתור את הבעיה ללא שימוש בלגראנזי'אן.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את נקודות הקיצון הגלובאליות של הפונקציה $f(x, y) = x + y$ בתחום:

$$D = \{(x, y) \,| xy \geq 4, x + 2y \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$$

<u>פתרון:</u>

בדומה לשאלה על המשולש שראינו בפרק על נקודות קיצון, נתקדם בשלבים ־ נחפש נקודות חשודות בתוך התחום, בשפתו וב"פינותיו".

קודם כל, נחפש נקודות חשודות בתוך התחום. נשווה את הגרדיאנט ל־0 ונקבל:

$$(1, 1) = (0, 0)$$

וזה כמובן לא אפשרי. לכן אין נקודות חשודות בפנים התחום (וקל וחומר שאין שם קיצון).

נחפש נקודות חשודות על השפה.

ראשית, במקרים $x = 0$ ו$-$ $y = 0$ הנקודות אינן בתחום, כי נדרש $xy \geq 4$.

אם $x + 2y = 9$ אז $x + y = 9 - y$, כלומר נחפש נקודות קיצון של:

$$9 - y$$

וזהו קו ישר, והקיצון שלו תתקבלנה בקצוותיו. כלומר, כאשר $x + 2y = 9$ וגם $xy = 4$.

נפתור את שתי המשוואות האלו, ונקבל: $y = 4, y = \frac{1}{2}$.

לכן, הנקודות החשודות הן: $(1, 4), \left(8, \frac{1}{2}\right)$.

נותר לחפש נקודות חשודות על $xy = 4$. כלומר:

$$y = \frac{4}{x}$$

נגזור, נשווה ל-0 ונקבל:

$$1 - \frac{4}{x^2} = 0$$

ולכן: $x = \pm 2$.

נזכור כי $x \geq 0$ ולכן רק $x = 2$ מתאים ולכן הנקודה החשודה היא $(2, 2)$.

כעת נבדוק מהו הערך של f בכל אחת מהנקודות החשודות:

$$f(2, 2) = 4$$

$$f\left(8, \frac{1}{2}\right) = 8\frac{1}{2}$$

$$f(1,4)=5$$

ולכן $(2,2)$ היא נקודת מינימום גלובאלי בתחום D, ו־ $\left(8,\frac{1}{2}\right)$ היא נקודת מקסימום גלובאלי בתחום D.

שימו לב שלא השתמשנו בכופלי לגראנז'.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את המרחק המינימלי בין הנקודה $(0,0)$ להיפרבולה:

$$7x^2+8xy+y^2=45$$

<u>פתרון:</u>

הפוקנציה שלנו צריכה לתאר מרחק, קרי: $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

עם זאת, אפשר למצוא קיצון לפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2$, מכיוון שאם נמצא נקודה שבה ריבוע המרחק הוא מינימלי, גם המרחק יהיה מינימלי. הרבה יותר נוח לגזור את הפונקציה בריבוע, כמובן, ולכן נעבוד עם הריבוע.

האילוץ שלנו הוא:

$$g(x,y)=7x^2+8xy+y^2-45$$

ולכן הלגראנז'יאן תהיה:

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\left(7x^2+8xy+y^2-45\right)$$

נשווה את הגרדיאנט ל־0 ונקבל:

$$L_x=2x+14\lambda x+8\lambda y=0$$

$$L_y=2y+2\lambda y+8\lambda x=0$$

$$L_\lambda = 7x^2 + 8xy + y^2 - 45 = 0$$

מהמשוואה הראשונה, $x = -\frac{8\lambda y}{2+14\lambda}$. נציב במשוואה השנייה ונקבל:

$$2y + 2\lambda y - \frac{64\lambda^2 y}{2 + 14\lambda} = 0$$

נכפיל ב-$2 + 14\lambda$ ונקבל:

$$4y + 28\lambda y + 4\lambda y + 28\lambda^2 y - 64\lambda^2 y = 0$$

נוציא גורם משותף y, קצת הוקוס פוקוס אלגברי ונקבל:

$$0 = y\left(4 + 32\lambda - 36\lambda^2\right) = -y\left(36\lambda + 4\right)\left(\lambda - 1\right)$$

לפיכך, יש 3 אפשרויות. אם $y = 0$, נקבל שגם $x = 0$ ונקודה זו לא מקיימת את האילוץ וסתירה.

אם $\lambda = 1$, נקבל ש: $x = -\frac{y}{2}$. נציב זאת במשוואת האילוץ:

$$0 = 7 \cdot \frac{y^2}{4} - 8 \cdot \frac{y}{2} \cdot y + y^2 - 45 \Longrightarrow 45 = -\frac{5y^2}{4}$$

וסתירה.

אם כן, $36\lambda + 4 = 0$, קרי $\lambda = -\frac{1}{9}$. מכאן, $x = 2y$. נציב זאת במשוואת האילוץ:

$$7 \cdot 4y^2 + 16y^2 + y^2 - 45 = 0 \Longrightarrow y^2 = 1$$

נקבל ש: $y = \pm 1$, ואת הנקודות $(2,1)\,,(-2,-1)$.

נציב אותן בפונקציה ונקבל:

$$f\left(2,1\right)=f\left(-2,-1\right)=5$$

נזכור שזהו ריבוע המרחק, ולכן המרחק הוא $\sqrt{5}$.

הערה 8.4 1. לא בכל מקרה אפשר להתשמש בלגראנז'יאן. מבלי להיכנס לעומק המתמטיקה, אנו דורשים שהגרדיאנט של הפונקציה f יהיה צירוף ליניארי של הגרדיאנטים של האילוצים g_i (כפי שאנו רואים במשוואות $\nabla L=0$), ואף יותר מכך - שהם יהיו בת"ל. לכן, אם הגרדיאנטים של האילוצים תלויים ליניארית, ובפרט אם אחד מהם מתאפס בנקודה החשודה, הלגראנז'יאן לאו דווקא תוכל לתת לנו את הפתרון.

נדגים זאת. נתבונן בפונקציה $f\left(x,y\right)=x$ תחת האילוץ $g\left(x,y\right)=y^2+x^4-x^3=0$.

כלומר, $y^2=x^3-x^4$. לכן $x^3-x^4\geq 0$ ולכן $x\geq 0$. מצד שני, $x=0$ אכן מקיים את האילוץ, בנקודה $\left(0,0\right)$. לכן, המינימום המוחלט של f מתקבל בנקודה $\left(0,0\right)$.

ננסה למצוא אותו בעזרת כופלי לגראנז'. הלגראנז'יאן היא:

$$L\left(x,y,\lambda\right)=f+\lambda g$$

נשווה $\nabla L=0$:

$$\begin{cases}L_x=1+\lambda\left(4x^3-3x^2\right)=0\\ L_y=2\lambda y=0\\ L_\lambda=y^2+x^4-x^3=0\end{cases}$$

מהמשוואה השנייה, $\lambda=0$ או $y=0$.

אם $\lambda=0$ נקבל במשוואה הראשונה $1=0$ וסתירה. לכן $y=0$.

נציב זאת במשוואה השלישית ונקבל: $x^4-x^3=x^3\left(x-1\right)=0$ כלומר $x=0$ או $x=1$.

אם $x=0$ נקבל במשוואה הראשונה $1=0$ וסתירה. לכן $x=1$, וקיבלנו את הנקודה $\left(1,0\right)$.

אנו יודעים ש־$(0,0)$ המינימום המוחלט של f תחת האילוץ ובכל זאת כופלי לגראנז' לא נתנו אותה; זאת, מכיוון שהגרדיאנט של g:

$$\nabla g=\left(2y,4x^{3}-3x^{2}\right)$$

מתאפס בנקודה $(0,0)$.

2. איך אנו יודעים שהקיצון שמתקבלות הן באמת קיצון מוחלט? כלומר, בדקנו אם התנאי ההכרחי מתקיים (הגרדיאנט מתאפס), אך כפי שראינו בעבר התנאי ההכרחי לא בהכרח מספיק. מה מבטיח לנו, אם כן, שאלו אכן נקודות הקיצון המבוקשות?

ניזכר ב**משפט ויירשטראס**: פונקציה רציפה בקבוצה קומפקטית מקבלת שם מינימום ומקסימום (מוחלטים, כמובן). אם כן, אם האילוצים שלנו מגדירים קבוצה קומפקטית, נוכל לומר בבטחה שהנקודות שמצאנו הן נקודות הקיצון המוחלטות (זכרו שהן מקיימות את התנאי ההכרחי לקיצון, קרי גרדיאנט מתאפס).

מה קורה כאשר האילוצים מגדירים קבוצה שאינה קומפקטית? לא נוכל להשתמש במשפט ויירשטראס!

כאן, משתמשים בתעלול פורמלי. אחרי שמצאנו את כל הנקודות הקריטיות, **שמקיימות את התנאי ההכרחי**, אפשר לקחת כדור סגור עם רדיוס מספיק גדול כך שיכיל את כל הנקודות הקריטיות, ולהסתכל בחיתוך של הכדור והאילוץ. החיתוך הוא קבוצה סגורה וחסומה ולכן (לפי משפט היינה־בורל) הוא קבוצה קומפקטית. כפי שהסברנו, בקבוצה קומפקטית אנו יכולים לומר שהנקודות שמצאנו הן הן נקודות הקיצון המוחלטות.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את נקודות הקיצון של $f\left(x,y,z\right)=-x+2y+2z$ תחת האילוצים:

$$g_{1}\left(x,y,z\right)=y+2z-1=0,g_{2}\left(x,y,z\right)=x^{2}+y^{2}-2=0$$

<u>פתרון:</u>

f תקבל מקסימום ומינימום תחת האילוצים שלנות מכיוון שהקבוצה המוגדרת על ידיהם:

$$K=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3| \begin{array}{c} x^2+y^2=2 \\ y+2z=1 \end{array}\right\}$$

היא קומפקטית.

אם כן, הלגראנז'יאן שלנו היא:

$$L\left(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2\right)=f+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2$$

נשווה $\nabla L=0$:

$$\begin{cases} L_x=-1+2\lambda_2 x=0 \\ L_y=2+\lambda_1+2\lambda_2 y=0 \\ L_z=2+2\lambda_1=0 \\ L_{\lambda_1}=y+2z-1=0 \\ L_{\lambda_2}=x^2+y^2-2=0 \end{cases}$$

מהמשוואה השלישית נקבל $\lambda_1=-1$ חיש־קל.

נציב זאת במשוואה השנייה, ועם המשוואה הראשונה נקבל:

$$x=\frac{1}{2\lambda_2},y=-\frac{1}{2\lambda_2}$$

נציב זאת במשוואת האילוץ השני:

$$\left(\frac{1}{2\lambda_2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2\lambda_2}\right)^2-2=0$$

לפיכך, $\lambda_2=\pm\frac{1}{2}$.

כאשר $\lambda_2=\frac{1}{2}$, נקבל $x=1,y=-1$ ומהאילוץ הראשון נקבל $z=-1$.

כאשר $\lambda_2=-\frac{1}{2}$, נקבל $x=-1,y=1$ ומהאילוץ הראשון נקבל $z=0$.

אם כך, קיבלנו שתי נקודות: $(1,-1,1)\,,(-1,1,0)$.

נבדוק מהו ערך הפונקציה בכל אחת מהן:

$$f\left(1,-1,1\right)=-1,f\left(-1,1,0\right)=3$$

לכן $(1,-1,1)$ נקודת מינימום, $(-1,1,0)$ נקודת מקסימום.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציה:

$$f\left(x,y,z\right)=\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z$$

בכדור: $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{3}|x^{2}+y^{2}+z^{2}\leq2\right\}$.

<u>פתרון:</u>

בדומה לתרגילים קודמים, נחפש קודם נקודות חשודות בתוך התחום (נשווה $\nabla f=0$) ולאחר מכן בשפת התחום (נשווה $\nabla L=0$).

אם כן, נשווה $\nabla f=0$ ונקבל:

$$\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{3}\right)=(0,0,0)$$

וכמובן אין פתרון.

על שפת התחום, נחפש נקודות חשודות בעזרת כופלי לגראנז'.

הלגראנז'יאן היא:

$$L\left(x,y,z,\lambda\right)=f+\lambda\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}-2\right)$$

נשווה $\nabla L = 0$:

$$\begin{cases} L_x = \sqrt{2} + 2\lambda x = 0 \\ L_y = \sqrt{2} + 2\lambda y = 0 \\ L_z = \sqrt{3} + 2\lambda z = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

משלוש המשוואות הראשונות נקבל:

$$x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2\lambda}, z = -\frac{\sqrt{3}}{2\lambda}$$

נציב זאת במשוואת האילוץ:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2\lambda}\right)^2 - 2 = 0$$

ונקבל $\lambda = \pm\sqrt{\frac{7}{8}}$.

נקבל את הנקודות: $\left(-\sqrt{\frac{4}{7}}, -\sqrt{\frac{4}{7}}, -\sqrt{\frac{6}{7}}\right), \left(\sqrt{\frac{4}{7}}, \sqrt{\frac{4}{7}}, \sqrt{\frac{6}{7}}\right)$.

נבדוק מהם ערכי f בנקודות אלו:

$$f\left(\sqrt{\frac{4}{7}}, \sqrt{\frac{4}{7}}, \sqrt{\frac{6}{7}}\right) = \sqrt{14}, f\left(-\sqrt{\frac{4}{7}}, -\sqrt{\frac{4}{7}}, -\sqrt{\frac{6}{7}}\right) = -\sqrt{14}$$

ולכן $\left(-\sqrt{\frac{4}{7}}, -\sqrt{\frac{4}{7}}, -\sqrt{\frac{6}{7}}\right)$ מינימום, $\left(\sqrt{\frac{4}{7}}, \sqrt{\frac{4}{7}}, \sqrt{\frac{6}{7}}\right)$ מקסימום.

תרגילים נוספים

1. נסעתי לאמריקה למצוא אפשרויות

   אמרו לי אנשים ששם קל יותר לחיות

   ארזתי מזוודה, תליתי בה תקוות

עליתי על מטוס, פשוט קצת לנסות

(המלך זצ"ל)

בהנחה שהמזוודה בצורת תיבה ושטח הפנים שלה מינימלי, מהם אורכה, רוחבה וגובהה של המזוודה אם ידוע שנפחה S?

2. בנמל קטן בחוף של פורטוגל, יש מגדלור גלילי, המתואר על ידי המשוואה $x^2+y^2=1$. היכן שהגליל חותך את המישור $z=x+y$, במגדלור, היא שם חיכתה לי. מצאו את הנקודה (או נקודות) הקרובה ביותר ואת הנקודה הרחוקה ביותר מהיכן שהיא חיכתה לי אל הראשית $(0,0,0)$.

3. עכשיו עליי למכור ספינה כדי לממן בניית חומות זהב מסביב למגדלור. מחיר הספינה נקבע על ידי הפונקציה $P\left(x,y,z\right)=y\left(x+z\right)$ כאשר $x,y,z\in\mathbb{R}$. מצאו מהו טווח המחירים לספינה תחת האילוצים:

$$x^2+y^2=1, y^2+z^2=4$$

4. **היפר־מישור** ב־$\mathbb{R}^n$ הוא אוסף הנקודות המקיים משוואה מהצורה:

$$C_1x_1+\cdots+C_nx_n+D=0$$

כאשר $D\in\mathbb{R}^n$ והמטריצה $(C_1\ldots C_n)$ היא מדרגה 1.

תהי $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ נקודה. מצאו את מרחקה מההיפר־מישור.

המרחק של נקודה a **מקבוצה** A נתון על ידי:

$$\inf\left\{\|x-a\|\,|x\in A\right\}$$

פתרונות

1. אנו רוצים למצוא קיצון של הפונקציה:

$$f(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$$

תחת האילוץ:

$$g(x,y,z) = xyz - S = 0$$

הלגראנז'יאן היא:

$$L(x,y,z,\lambda) = f + \lambda g$$

נשווה את הגרדיאנט ל-0:

$$\begin{cases} L_x = 2y + 2z + \lambda yz = 0 \\ L_y = 2x + 2z + \lambda xz = 0 \\ L_z = 2x + 2y + \lambda yz = 0 \\ L_\lambda = xyz - S = 0 \end{cases}$$

נחסר את המשוואה הראשונה מהשנייה ונקבל:

$$2x - 2y + \lambda xz - \lambda yz = 0$$

ולכן:

$$(x-y)(2+\lambda z) = 0$$

אם $2 + \lambda z = 0$ אז $z = -\frac{2}{\lambda}$, אבל אם נציב זאת במשוואה הראשונה נקבל:

$$2y - \frac{4}{\lambda} - 2y = 0$$

כלומר $-\frac{4}{\lambda} = 0$ וסתירה.

לכן, $x = y$.

באופן דומה מקבלים גם ש-$x = z$.

אם כך, זו קוביה.

מהאילוץ נקבל:

$$x^3 = S$$

ולכן: $x = y = z = \sqrt[3]{S}$, ושטח הפנים המינימלי הוא:

$$6\sqrt[3]{S^2}$$

2. במקום להסתכל על פונקציית המרחק מהראשית, $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, נסתכל על פונקציית המרחק בריבוע:

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

כי למי יש כוח לגזור שורש. אם המרחק בריבוע מינימלי/מקסימלי, כך גם המרחק עצמו.

אם כן, האילוצים הם:

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) = x^2+y^2-1 = 0 \\ g_2(x,y,z) = x+y-z = 0 \end{cases}$$

הלגראנז'יאן היא:

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$$

נשווה את הגרדיאנט ל-0:

$$\begin{cases} L_x = 2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ L_z = 2z - \lambda_2 = 0 \\ L_{\lambda_1} = x^2+y^2-1 = 0 \\ L_{\lambda_2} = x+y-z = 0 \end{cases}$$

מהמשוואות השלישית והחמישית נקבל: $\lambda_2 = 2x + 2y$. נציב זאת בשתי המשוואות הראשונות ונקבל:

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda_1 x + 2x + 2y = 0 \\ 2y + 2\lambda_1 y + 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

ולכן $(2+\lambda_1)\,y = x + (2+\lambda_1)\,x + y = 0$, ואם כך: $(2+\lambda_1)^2 = 1$ (נבודד את x מהמשוואה הראשונה ונציב בשנייה, למשל), כלומר: $\lambda_1 = -1, -3$.

אם היינו בוחרים פתרון טריוויאלי, כלומר $x = 0$ או $y = 0$, לא היינו מקיימים את האילוצים.

אם $\lambda_1 = -1$, נקבל מהמשוואות הראשונות: $x = -y$.

מהאילוץ הראשון נקבל: $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ובהתאמה $y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$, ומהאילוץ השני נקבל שבכל אופן $z = 0$, ואם כך הנקודות הן:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

ועבורן המרחק (בריבוע) הוא: $f = 1$.

אם $\lambda_1 = 3$, נקבל מהמשוואות הראשונות: $x = y$.

מהאילוץ הראשון נקבל: $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ובהתאמה $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, ומהאילוץ השני נקבל ש: $z = \pm\sqrt{2}$, ואם כך הנקודות הן:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$$

ועבורן המרחק בריבוע הוא $f = 3$ (והמרחק עצמו הוא $\sqrt{3}$).

אפשר לראות שהגרדיאנטים של האילוצים $\nabla g_1, \nabla g_2$ הם בת"ל ולכן אלו הן הנקודות שלנו.

3. הגרדיאנטים של האילוצים הם:

$$(2x, 2y, 0), (0, 2y, 2z)$$

מתי הם תלויים ליניארית? יש 3 אופציות: $x, z = 0$, $y, z = 0$, $x, y = 0$. אף אחת מאלו לא מקיימת את האילוצים, ולכן הלגראנז'יאן תיתן לנו את המינימום והמקסימום.

אם כן, הלגראנז'יאן היא:

$$L\left(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2\right)=y\left(x+z\right)+\lambda_1\left(x^2+y^2-1\right)+\lambda_2\left(y^2+z^2-4\right)$$

נשווה את הגרדיאנט ל-0:

$$\begin{cases} L_x=y+2\lambda_1 x=0 \\ L_y=x+z+2\lambda_1 y+2\lambda_2 y=0 \\ L_z=y+2\lambda_2 z=0 \\ L_{\lambda_1}=x^2+y^2-1=0 \\ L_{\lambda_2}=y^2+z^2-4=0 \end{cases}$$

קצת אלגברה ליניארית. את שלוש המשוואות הראשונות אפשר להציג באופן הבא:

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 2\left(\lambda_1+\lambda_2\right) & 1 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אם המטריצה הפיכה, נקבל שהפתרון הוא $(0,0,0)$ והוא כמובן לא מקיים את האילוצים.

לפיכך, נדרוש שהמטריצה אינה הפיכה, כלומר דטרמיננטתה מתאפסת:

$$0=\begin{vmatrix} 2\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 2\left(\lambda_1+\lambda_2\right) & 1 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \end{vmatrix}=2\lambda_1\cdot 2\lambda_2\cdot 2\left(\lambda_1+\lambda_2\right)-2\lambda_2-2\lambda_1$$

ולכן: $\left(4\lambda_1\lambda_2-1\right)\left(2\lambda_1+2\lambda_2\right)=0$.

אם $\lambda_1=-\lambda_2$, מהמשוואה השנייה נקבל $x=-z$. נציב זאת באילוץ הראשון ונקבל: $z^2+y^2=1$, אך זו סתירה לאילוץ השני.

לכן, $4\lambda_1\lambda_2-1=0$, כלומר $4\lambda_1\lambda_2=1$.

מהמשוואות הראשונה והשלישית נקבל: $y=-2\lambda_1 x=-2\lambda_1 z$, נכפול זה בזה ונקבל:

$$y^2=4\lambda_1\lambda_2 xz=xz$$

נציב במשוואות האילוצים ונקבל:

$$\begin{cases} xz + x^2 = 1 \\ xz + z^2 = 4 \end{cases}$$

אם $x = 0$ אז גם $y = 0$ וזו סתירה לאילוץ הראשון. לכן אפשר להניח $x \neq 0$ ולכן:

$$z = \frac{1 - x^2}{x}$$

נציב זאת באילוץ השני:

$$1 - x^2 + \frac{1 - 2x^2 + x^4}{x^2} = 4$$

נכפיל ב־x^2 ונקבל $5x^2 = 1$, כלומר $x = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$. במצב כזה, $z = \pm\sqrt{\frac{16}{5}}$.

לכן, $y^2 = \frac{4}{5}$ בכל אופן, כלומר: $y = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$. אם כך, נקבל בסך הכל 4 נקודות:

$$\left(\sqrt{\frac{1}{5}}, \pm\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{16}{5}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{5}}, \pm\sqrt{\frac{4}{5}}, -\sqrt{\frac{16}{5}}\right)$$

ערכי P בנקודות אלו הם:

$$P\left(\sqrt{\frac{1}{5}}, \pm\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{16}{5}}\right) = \pm 2, P\left(-\sqrt{\frac{1}{5}}, \pm\sqrt{\frac{4}{5}}, -\sqrt{\frac{16}{5}}\right) = \mp 2$$

ולכן המחיר נמצא בין -2 לבין 2.

בהנחה שאין מחיר שלילי, $0 \leq P \leq 2$.

4. נסתכל על ריבוע המרחק, כמובן. הפונקציה היא:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2$$

והאילוץ הוא:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = C_1 x_1 + \cdots + C_n x_n + D = 0$$

הגרדיאנט של האילוץ הוא $(C_1, \ldots, C_n)$ וזו מטריצה מדרגה 1, כלומר לא וקטור האפס ולכן הלגראנז'יאן תיתן לנו את המינימום.

הלגראנז'יאן היא:

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f + \lambda g$$

נשווה את הגרדיאנט ל־0 ונקבל את המשוואות:

$$\begin{cases} L_{x_i} = 2\left(x_i - a_i\right) + \lambda C_i = 0 \quad i \leq 1 \leq n \\ L_\lambda = C_1 x_1 + \cdots + C_n x_n + D = 0 \end{cases}$$

כלומר: $x_i = -\frac{\lambda C_i}{2} + a_i$. נציב באילוץ ונקבל:

$$-\frac{\lambda C_1 C_1}{2} + a_1 C_1 - \cdots - \frac{\lambda C_n C_n}{2} + a_n C_n + D = 0$$

נסמן: $\vec{C} = (C_1, \ldots, C_n)$ ונוכל לרשום:

$$-\frac{\lambda}{2}\vec{C}\cdot\vec{C} + a\cdot\vec{C} + D = 0$$

כלומר: $\lambda = \frac{2D+2a\cdot\vec{C}}{\vec{C}\cdot\vec{C}}$. לכן:

$$x_i = -\frac{C_i\left(D + a\cdot\vec{C}\right)}{\vec{C}\cdot\vec{C}} + a_i$$

ולכן קיבלנו את הנקודה:

$$x = \left(-\frac{C_1\left(D + a\cdot\vec{C}\right)}{\vec{C}\cdot\vec{C}} + a_1, \ldots, -\frac{C_n\left(D + a\cdot\vec{C}\right)}{\vec{C}\cdot\vec{C}} + a_n\right)$$

למה זו נקודת מינימום?

ניקח כדור סגור (או קובייה או וואטאבר) שמרכזו בנקודה a ורדיוסו מספיק גדול כך שהוא יחתוך את ההיפר־מישור.

חיתוך הכדור וההיפר־מישור הוא קבוצה קומפקטית (סגורה וחסומה) ולכן f מקבלת בה מינימום. ברור שהמינימום הזה הוא המינימום של f על כל ההיפר־מישור, כי הנקודות שבחיתוך הכדור וההיפר־מישור יותר קרובות ל־a מאשר נקודות על ההיפר־מישור שנמצאות מחוץ לכדור.

נחשב את המרחק:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{\left(-\frac{C_1\left(D + a\cdot\vec{C}\right)}{\vec{C}\cdot\vec{C}} + a_1 - a_1\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{C_n\left(D + a\cdot\vec{C}\right)}{\vec{C}\cdot\vec{C}} + a_n - a_n\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{C_1\left(D + a\cdot\vec{C}\right)}{\vec{C}\cdot\vec{C}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{C_n\left(D + a\cdot\vec{C}\right)}{\vec{C}\cdot\vec{C}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\left(C_1^2 + \cdots + C_n^2\right)\left(D + a\cdot\vec{C}\right)^2}{\left(\vec{C}\cdot\vec{C}\right)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\vec{C}\cdot\vec{C}\right)\left(D+a\cdot\vec{C}\right)^2}{\left(\vec{C}\cdot\vec{C}\right)^2}} = \frac{\sqrt{\left(D+a\cdot\vec{C}\right)^2}}{\sqrt{\vec{C}\cdot\vec{C}}} = \frac{\left|D+a\cdot\vec{C}\right|}{\sqrt{\vec{C}\cdot\vec{C}}}$$

כלומר, המרחק הוא:

$$\frac{|a_1C_1+\cdots+a_nC_n+D|}{\sqrt{C_1^2+\cdots+C_n^2}}$$

היזכרו בנוסחה למרחק נקודה ממישור שראיתם בבית הספר.

9 אינטגרלים רב־מימדיים

9.1 מבוא

האינטגרל הוא מלך החדו"א. הקורס הבא, אינפי 4, עוסק רובו ככולו באינטגרלים.

לפני שנתחיל, נעיר כמה הערות.

הערה 9.1 אנו מתעסקים אך ורק באינטגרלים מסוימים. כלומר, נרצה בשורה התחתונה ־ לאחר חישוב האינטגרל ־ לקבל סקלר ולא פונקציה.

כמו כן, נתעסק רק באינטגרלים כפולים ומשולשים, אם כי אין הבדל משמעותי בתיאוריה כאשר המימדים משתנים.

לא נסביר כאן את התיאוריה שמאחורי האינטגרלים ־ חלוקות, סכומי דרבו וכן הלאה.

אי לכך, נעבוד רק עם פונקציות רציפות, למרות שאנו יודעים שהדרישה המספיקה לביצוע אינטגרל חלשה יותר (אינטגרביליות).

אנו צריכים לדעת לעבוד עם אינטגרלים רגילים (חד־מימדיים).

נזכיר כאן כמה תכונות של האינטגרל הרב־מימדי. ננסח אותן ביחס לאינטגרל כפול, אך אפשר בקלות להכליל אותן לכל מימד שהוא.

משפט 9.2 תכונות האינטגרל הכפול:

יהיו R, R_1, R_2 תחומים (חסומים) וסגורים ב־$\mathbb{R}^2$, ותהיינה f,g פונקציות רציפות בתחומים אלו. כמו כן, יהיו $a,b\in\mathbb{R}$. אזי:

1. $\iint_R (af+bg)\,ds = a\iint_R fds + b\iint_R gds$.
2. אם $R_1 \cup R_2 = R$ וגם $R_1 \cap R_2 = \phi$, אז: $\iint\limits_{R} fds = \iint\limits_{R_1} fds + \iint\limits_{R_2} fds$.
3. קיימת נקודה (x_0,y_0) עבורה: $\iint\limits_{R} fds = S(R)\cdot f(x_0,y_0)$, כאשר $S(R)$ הוא שטח התחום R.
4. $m\cdot S(R) \le \iint\limits_{R} fds \le M\cdot S(R)$, כאשר $M=\max\limits_{R} f, m=\min\limits_{R} f$.
5. $\left|\iint\limits_{R} fds\right| \le \iint\limits_{R} |f|\,ds$.

הסימון ds משמעו אינטגרציה לפי כל המשתנים הרלוונטיים, למשל במישור:

$$ds = dxdy$$

(או $ds = drd\theta$ שנראה בהמשך).

שימו לב שכל התכונות מתקיימות גם במשתנה יחיד. תכונה 1 היא אדיטיביות האינטגרל, את תכונה 2 במשתנה יחיד אפשר לכתוב: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ כאשר $c\in[a,b]$, תכונה 3 היא הכללה של משפט הערך הממוצע האינטגרלי ועל זו הדרך.

משפט 9.3 תהי $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה אי־זוגית ביחס למשתנה x_i ויהי $D\subseteq \mathbb{R}^n$ תחום סימטרי ביחס ל־x_i. אזי:

$$\int\limits_{D} fdx = 0$$

אז איך מחשבים אינטגרלים רב־מימדיים?

באופן מאד אינטואיטיבי ובדומה לנגזרות חלקיות, כשנרצה לחשב אינטגרל כפול, למשל: $\iint fdxdy$, נבצע אינטגרציה לפי x ולפי y (כמו שבנגזרת f_{xy} גזרנו לפי x ולפי y). פעולה כזו נקראת **אינטגרל חוזר** או **אינטגרל נשנה.**

עם זאת, בדומה למשתנה יחיד, הרבה יותר קל לגזור מלבצע אינטגרציה, כפי שנראה בהמשך.

9.2 החלפת סדר האינטגרציה

בראש ובראשונה עלינו להבין מתי אנחנו יכולים להחליף את סדר האינטגרציה - כלומר לבצע את האינטגרל לפי משתנה מסוים ואז לפי המשתנה השני (ואם ישנם משתנים נוספים אז השלישי, הרביעי וכן הלאה).

משפט 9.4 משפט פוביני ($fubini$):

תהי $f : A \times B \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה כאשר $A, B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות סגורות וחסומות.

לכל $x \in A$ נגדיר פונקציה $f^x : B \to \mathbb{R}$ על ידי:

$$f^x(y) = f(x, y)$$

אזי, f^x רציפה ומתקיים:

$$\iint\limits_{A \times B} f(x, y)\, dxdy = \int\limits_A \left(\int\limits_B f^x(y)\, dy \right) dx$$

באופן דומה, לכל $y \in B$ נגדיר פונקציה $f^y(x) : A \to \mathbb{R}$ על ידי:

$$f^y(x) = f(x, y)$$

אזי, f^y רציפה ומתקיים:

$$\iint\limits_{A \times B} f(x, y)\, dxdy = \int\limits_B \left(\int\limits_A f^y(x)\, dx \right) dy$$

כלומר, אפשר להחליף את סדר האינטגרציה.

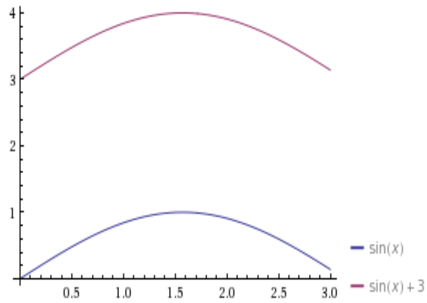
כמו שהערנו, אפשר להחליף את הרציפות בדרישה חלשה יותר של אינטגרביליות.

יופי, אנו מבינים מתי אפשר להחליף את סדר האינטגרציה. נותר לנו להבין איך.

בהינתן תחום מלבני, למשל $D=[0,1]\times\left[\frac{1}{2},\frac{19}{3}\right]$, הדבר ברור:

$$\iint\limits_D f dx dy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{19}{3}} f dy\right)dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{19}{3}}\left(\int\limits_0^1 f dx\right)dy$$

עם זאת, במישור אנו יכולים לבחור תחומים מוזרים יותר, כאלו שבהם אחד מהמשתנים נתון כפונקציה של האחר, למשל:



זהו התחום: $D=\{0\le x\le 3,\sin x\le y\le \sin x+3\}$.

איך נוכל להחליף כאן סדר אינטגרציה?

במקרה כזה, נצטרך "להפוך את היוצרות", כלומר להביע את המשתנה שכרגע כלוא בין מספרים למשתנה שכלוא בין שתי פונקציות של המשתנה האחר, ולהיפך. כלומר:

$$\{a\le x\le b,y_1(x)\le y\le y_2(x)\}\iff\{x_1(y)\le x\le x_2(y),c\le y\le d\}$$

הדרך הכי פשוטה היא לצייר את התחום, ו"לסובב" אותו כך שהצירים יתהפכו (פורמלית, אין סיבוב שיכול להפוך את הצירים, מכיוון שהצירים בעלי כיוון, בעלי **אוריינטציה**; אצלנו הציור הוא רק כלי עזר ולכן נרשה לעצמנו לעשות זאת. חשבו על דיאגרמת ון - היא מאד עוזרת אינטואיטיבית, אך בוודאי אין לה קשר להוכחה פורמלית של שוויון או הכלה בין קבוצות).

<u>תרגיל:</u>

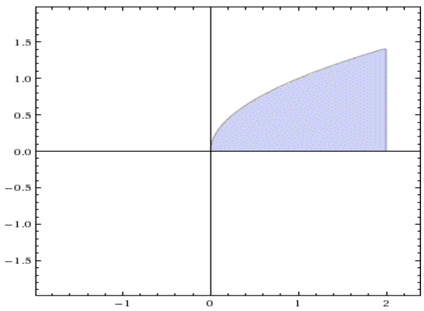
החליפו את סדר האינטגרציה באינטגרל:

$$\int\limits_0^2\int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dydx$$

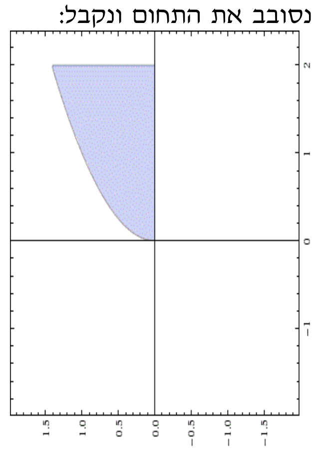
<u>פתרון:</u>

התחום שלנו הוא:

$$\left\{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\right\}$$



נסובב את התחום ונקבל:



כלומר:

$$\left\{0 \leq y \leq \sqrt{2}, y^2 \leq x \leq 2\right\}$$

ולכן:

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy dx = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^2 f(x, y)\, dx dy$$

<u>תרגיל:</u>

החליפו את סדר האינטגרציה באינטגרל:

$$\int_{0}^{2}\int_{1}^{e^y} f\left(x,y\right)dxdy$$

<u>פתרון:</u>

התחום שלנו הוא:

$$\{1\le x\le e^y, 0\le y\le 2\}$$

כלומר:

$$\left\{1\le x\le e^2, \ln x\le y\le 2\right\}$$

ולכן:

$$\int_{0}^{2}\int_{1}^{e^y} f\left(x,y\right)dxdy=\int_{1}^{e^2}\int_{\ln x}^{2} f\left(x,y\right)dydx$$

ציירו וראו שכך הוא.

<u>תרגיל:</u>

החליפו את סדר האינטגרציה באינטגרל:

$$\int_{0}^{4}\int_{3x^3}^{12x} f\left(x,y\right)dydx$$

<u>פתרון:</u>

התחום שלנו הוא:

$$\left\{0\le x\le 4, 3x^2\le y\le 12x\right\}$$

נקודות החיתוך בין שתי העקומות $y=3x^2, y=12x$ הן אכן $x=0,4$.

שתי העקומות מקיימות $y\left(0\right)=0, y\left(4\right)=48$.

כלומר:

$$\left\{0\leq y\leq 48, \frac{y}{12}\leq x\leq \sqrt{\frac{y}{3}}\right\}$$

שימו לב שהעקומה שהייתה למעלה, $y=12x$, נמצאת עכשיו למטה, $x=\frac{y}{12}$.

ולכן:

$$\int\limits_{0}^{4}\int\limits_{3x^3}^{12x}f\left(x,y\right)dydx=\int\limits_{0}^{48}\int\limits_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}}f\left(x,y\right)dxdy$$

תרגיל:

החליפו את סדר האינטגרציה באינטגרל:

$$\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}}f\left(x,y\right)dydx$$

פתרון:

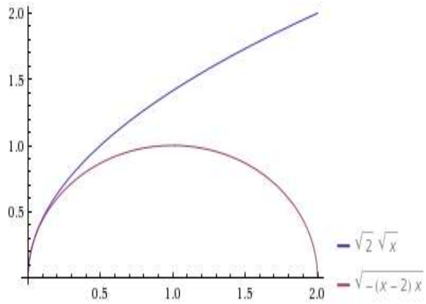
נצייר את הגרפים של שתי הפונקציות: $y=\sqrt{2x}, y=\sqrt{2x-x^2}$.

שימו לב שהפונקציה $y=\sqrt{2x-x^2}$ היא המעגל שרדיוסו 1 ומרכזו בנקודה $\left(1,0\right)$:

$$y=\sqrt{2x-x^2}\Longrightarrow y^2+x^2-2x=0\Longrightarrow y^2+\left(x-1\right)^2=1$$

נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות היא $x=0$.

התחום שלנו הוא התחום הכלוא בין שתי הפונקציות:



בחצי המעגל, לכל $y \neq 1$ יש שני x מתאימים. כשנסובב, נקבל שלכל $x \neq 0$ יש שני y מתאימים, ולכן לא נוכל לבטא אותו כפונקציה של y (פונקציה הרי צריכה להיות חד ערכית).

מה נעשה?

נחלק את התחום שלנו לתחומים בהם אפשר להביע את x כמו שאנו צריכים.

נשים לב ש:

$$y = \sqrt{2x - x^2} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{1-y^2} + 1$$

הסימן נקבע בהתאם לתחום. כמו כן:

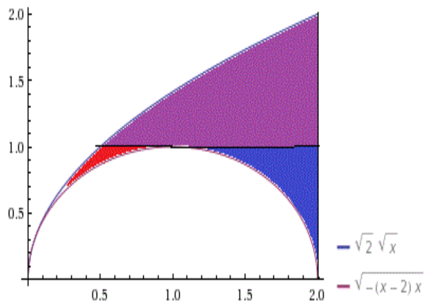
$$y = \sqrt{2x} \Longrightarrow x = \frac{y^2}{2}$$

התחום הראשון הוא $0 \le y \le 1$ ובו $\frac{y^2}{2} \le x \le -\sqrt{1-y^2} + 1$.

התחום השני הוא $0 < y \le 1$ ובו $\sqrt{1-y^2} + 1 \le x \le 2$.

התחום השלישי הוא $1 \le y \le 2$ ובו $\frac{y^2}{2} \le x \le 2$.

כלומר:



התחום הראשון הוא האדום, השני הכחול והשלישי הסגול.

סכום שלושת האינטגרלים הללו ייתן לנו את האינטגרל המבוקש.

לאחר שהבנו מתי ואיך מחליפים את סדר האינטגרציה, נוכל סוף כל סוף לבצע אינטגרציה.

9.3 חישוב אינטגרלים רבי־מימדים

משפט 9.5 חישוב אינטגרל כפול:

אם $f(x,y)$ רציפה בתחום המלבני: $R=[a,b]\times[c,d]$, אזי:

$$\iint\limits_R f dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

אם $f(x,y)$ רציפה בתחום: $R=\{a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$, אזי

$$\iint\limits_R f dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

אם $f(x,y)$ רציפה בתחום $R=\{x_1(y)\le x\le x_2(y), c\le y\le d\}$, אזי:

$$\iint\limits_R f dxdy=\int\limits_c^d\left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right)dy$$

כמו שהערנו, אפשר בקלות להכליל את המשפט למימדים גבוהים יותר.

בדומה לנגזרת, כאשר מבצעים אינטגרציה ביחס למשתנה מסוים מתייחסים אל האחרים כאל קבועים.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל הכפול

$$\iint\limits_R y^2x^2ds$$

במלבן $R=[-3,2]\times[0,1]$.

<u>פתרון:</u>

נסמן $f(x,y)=y^2x^2$. f רציפה ותחומנו מלבני. לכן:

$$\iint\limits_R y^2x^2ds=\int\limits_0^1\int\limits_{-2}^3 y^2x^2dxdy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{-2}^3 y^2x^2dx\right)dy$$

והאינטגרל הפנימי הוא אינטגרל במשתנה אחד. לכן:

$$=\int\limits_0^1\left(\left[\frac{y^2x^3}{3}\right]_{x=-3}^{x=2}\right)dy=\int\limits_0^1\left(\frac{8y^2}{3}+\frac{27y^2}{3}\right)dy=\left[\frac{8y^3}{9}+3y^3\right]_{y=0}^{y=1}=\frac{35}{9}$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל $\iint\limits_R x^2ydxdy$ כאשר R הוא התחום החסום ע"י העקומות:

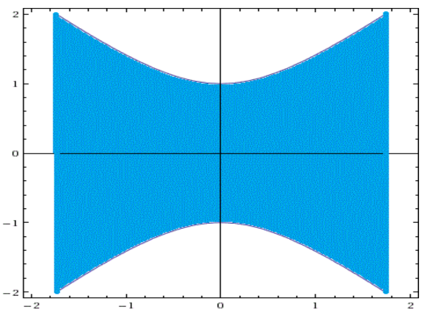
$$x=2,x=-2,y^2-x^2=1$$

.

<u>פתרון:</u>

התחום שלנו הוא:

$$R=\left\{-2\le x\le 2,-\sqrt{1+x^2}\le y\le\sqrt{1+x^2}\right\}$$



והאינטגרל שלנו הוא:

$$\iint\limits_R x^2ydxdy=\int\limits_{-2}^2\int\limits_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} x^2ydydx=\int\limits_{-2}^2\left(\left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_{y=-\sqrt{1+x^2}}^{y=\sqrt{1+x^2}}\right)=$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(\frac{x^2(1+x^2)}{2} - \frac{x^2(1+x^2)}{2} \right) dx = \int_{-2}^{2} 0dx = 0$$

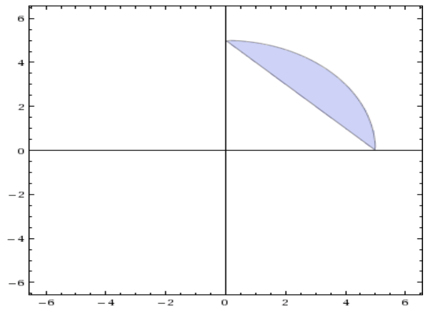
תרגיל:

חשבו את $\iint\limits_D ydxdy$ כאשר D הוא התחום הכלוא בין הישר $y = -x + 5$ והמעגל $x^2 + y^2 = 25$ ברביע הראשון.

פתרון:

התחום שלנו הוא:

$$D = \left\{ 0 \le x \le 5, 5 - x \le y \le \sqrt{25 - x^2} \right\}$$



ולכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_D ydxdy = \int_0^5 \left(\int_{5-x}^{\sqrt{25-x^2}} ydy \right) dx = \int_0^5 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{5-x}^{\sqrt{25-x^2}} dx =$$

$$= \int_0^5 \left(\frac{25 - x^2}{2} - \frac{(5-x)^2}{2} \right) dx = \left[\frac{25x}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{(5-x)^3}{6} \right]_0^5 = \frac{125}{6}$$

תרגיל:

חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^2 \int_0^z \int_0^y xyzdxdydz$$

<u>פתרון:</u>

נחשב את האינטגרל לפי x, לפי y ולפי z. אם כן:

$$\int_0^2\int_0^z\int_0^y xyzdxdydz=\int_0^2\left(\int_0^z\left(\int_0^y xyzdx\right)dy\right)dz=\int_0^2\left(\int_0^z\left(\frac{x^2yz}{2}\right)_{x=0}^{x=y}dy\right)dz=$$

$$=\int_0^2\left(\int_0^z\frac{y^3z}{2}dy\right)dz=\int_0^2\left(\frac{y^4z}{8}\right)_{y=0}^{y=z}dz=\int_0^2\frac{z^5}{8}dz=\left.\frac{z^6}{48}\right|_{z=0}^{z=2}=\frac{4}{3}$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל:

$$\iiint_G (1-x)\,dxdydz$$

כאשר G היא הפירמידה שפיאותיה הם מישורי הצירים והמישור $3x+2y+z=6$.

<u>פתרון:</u>

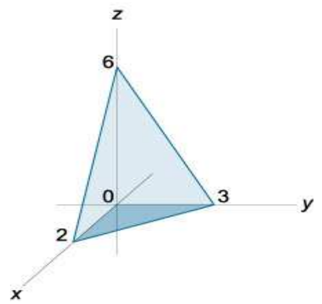
נסתכל על z, למשל, כעל כלוא בין שתי פונקציות של x,y: $f_1(x,y)\le z\le f_2(x,y)$.

לאחר מכן, נסתכל על ההטלה של הגוף למישור xy, כלומר מהו התחום המתאים ל$-x,y$.

בתחום זה נסתכל על y, למשל, כעל כלוא בין שתי פונקציות של x: $y_1(x)\le y\le y_2(x)$.

לבסוף, נבין מהו התחום של x (כלוא בין שני מספרים).

התחום שלנו הוא:



נשים לב שנקודות החיתוך עם הצירים x,y,z הן:

$$(2,0,0),(0,3,0),(0,0,6)$$

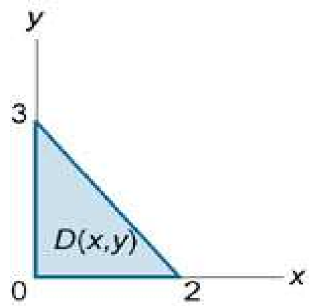
בהתאמה.

אם כן, z נמצא בין המישור למישור xy, שהוא המישור $z=0$.

במקרה שלנו, המישור הוא: $z=6-3x-2y$, ולכן:

$$0 \le z \le 6-3x-2y$$

כעת, ההטלה של הפירמידה על המישור xy תיתן לנו את התחום:



זהו המשולש שצלעותיו הן הישרים: $x=0, y=0$ והישר $y=3-\frac{3}{2}x$. לכן:

$$0 \le y \le 3-\frac{3}{2}x$$

ובסופו של דבר, $0 \le x \le 2$. לכן:

$$\iiint\limits_G (1-x)\,dxdydz = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{3-\frac{3}{2}x} \left(\int\limits_0^{6-2y-3x} (1-x)\,dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{3-\frac{3}{2}x} \left((1-x)\,z\right)_{z=0}^{z=6-2y-3x} dy \right) dx = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{3-\frac{3}{2}x} \left(6-3x-2y-6x+3x^2+2xy\right) dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(6y-9xy-y^2+3x^2y+xy^2\right)_{y=0}^{y=3-\frac{3}{2}x} dx = \int\limits_0^2 \left(9-18x+\frac{45}{4}x^2-\frac{9}{4}x^3\right) dx =$$

$$= \left(9x-\frac{18}{2}x^2+\frac{45}{12}x^3-\frac{9}{16}x^4\right)_{x=0}^{x=2} = 18-36+30-9=3$$

9.4 חישוב שטחים ונפחים

היזכרו בנוסחה טריוויאלית של אינטגרל במשתנה יחיד:

$$\int_a^b 1dx = b - a$$

כאשר $b-a$ הוא אורך הקטע $[a,b]$ בו מבוצעת האינטגרציה.

בכך אין רבותא. מה יקרה כאשר נעבור למימדים גבוהים יותר?

משפט 9.6 שטח באמצעות אינטגרל כפול:

יהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$, נסמן את שטחו ב־S. אזי:

$$S = \iint_D 1dxdy$$

בבית הספר חישבנו שטח הכלוא בין שתי פונקציות $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, כאשר $g \geq f$ בקטע $[a,b]$ בעזרת הנוסחה:

$$S = \int_a^b \left(f\left(x\right) - g\left(x\right)\right) dx$$

כעת, ניתן לראות שזהו פשוט מקרה פרטי של המשפט שלנו, בו התחום נתון על ידי:

$$D = \left\{a \leq x \leq b, g\left(x\right) \leq y \leq f\left(x\right)\right\}$$

ואז:

$$S = \iint_D 1dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{f(x)} 1dy\right) dx = \int_a^b \left(y\right)_{y=g(x)}^{y=f(x)} dx = \int_a^b \left(f\left(x\right) - g\left(x\right)\right) dx$$

משפט 9.7 נפח באמצעות אינטגרל משולש:

יהי $G \subseteq \mathbb{R}^3$, נסמן את נפחו ב$-V$. אזי:

$$V = \iiint\limits_G 1dxdydz$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את נפח הפירמידה G שקודקודיה הם הנקודות:

$$O\left(0,0,0\right), A\left(1,0,0\right), B\left(0,2,0\right), C\left(0,0,3\right)$$

<u>פתרון</u>

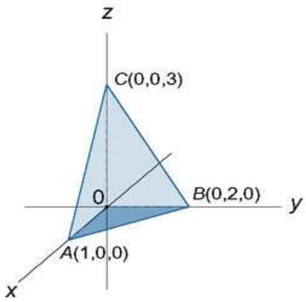
מהמשפט,

$$V = \iiint\limits_G 1dxdydz$$

אם כן, המישור ABC הוא המישור $6x+3y+2z=6$ (היזכרו איך למצוא משוואת מישור בעזרת 3 נקודות שעליו).

המישורים האחרים AOC, AOB, BOC הם מישורי הצירים.

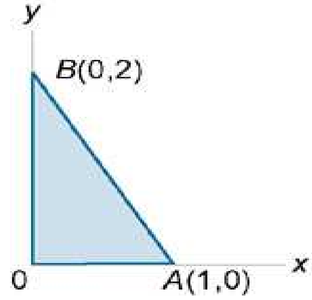
כלומר:



לפיכך, בתחום שלנו:

$$0 \leq z \leq \frac{6-3y-6x}{2} = 3-3x-\frac{3}{2}x$$

כעת, נטיל את הפירמידה על המישור xy ונקבל את התחום:



זהו התחום החסום על ידי הישרים $x = 0, y = 0, y = 2 - 2x$. לכן:

$$0 \leq y \leq 2 - 2x$$

לבסוף, $0 \leq x \leq 1$. לכן:

$$V = \iiint\limits_G 1dxdydz = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{2-2x} \left(\int\limits_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} 1dz \right) dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{2-2x} \left(3 - 3x - \frac{3}{2}y \right) dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(3y - 3xy - \frac{3}{4}y^2 \right)_{y=0}^{y=2-2x} dx = \int\limits_0^1 \left(6 - 6x - 6x + 6x^2 - \frac{3}{4}\left(4 - 8x + 4x^2\right) \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 3\left(1 - 2x + x^2\right) dx = 3 \cdot \left(x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right)_{x=0}^{x=1} = 1$$

כלומר, נפח הפירמידה הוא 1.

נסו לחשב את שטח הפירמידה בדרך ה"רגילה" - $V = \frac{Sh}{3}$.

הגובה h הוא מרחק הנקודה $(0,0,0)$ מהמישור ABC, כלומר:

$$h = \frac{|6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{6}{7}$$

אורך AB הוא $\sqrt{5}$, אורך AC הוא $\sqrt{10}$ ואורך BC הוא $\sqrt{13}$. נשתמש בנוסחת הרון:

$$S=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{13}+\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)\left(-\sqrt{13}+\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{13}-\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)}{16}}$$

כלומר $S=\frac{7}{2}$. אפשר לחשב את S גם בדרכים אחרות. אם כן:

$$V=\frac{Sh}{3}=\frac{\frac{7}{2}\cdot\frac{6}{7}}{3}=1$$

וזהו אכן הנפח.

משפט 9.8 נפח באמצעות אינטגרל כפול:

תהיינה $f\left(x,y\right),g\left(x,y\right)$ פונקציות רציפות בתחום D המקיימות $f\geq g$ בתחום. אזי, נפח התחום הכלוא בין f לבין g נתון על ידי:

$$V=\iint\limits_{D}\left(f\left(x,y\right)-g\left(x,y\right)\right)dxdy$$

במשפט אין חידוש, והוא רק מקרה פרטי של חישוב נפח כמו במשפט הקודם, כשכאן הגבולות של z הם:

$$g\left(x,y\right)\leq z\leq f\left(x,y\right)$$

הזכרתי אותו כאן כי הוא בעצם הכללה דו־מימדית לנוסחת חישוב שטח כלוא בין שתי פונקציות.

9.5 החלפת משתנים באינטגרל רב־מימדי

באינטגרלים חד־מימדיים, השיטה העיקרית לפתרון הייתה שיטת ההצבה ־ החלפת משתנים.

איך מחליפים משתנים באינטגרל רב־מימדי?

משפט 9.9 החלפת משתנים:

תהיינה $S \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ו־$g : S \to \mathbb{R}^n$ חח"ע וגזירה ברציפות על S כך ש־$|J_g(t)| \neq 0$ לכל $t \in S$.

אזי, לכל A קומפקטית (בעלת נפח) $A \subseteq g(S)$ ו־$f : A \to \mathbb{R}^n$ רציפה מתקיים:

$$\int\limits_A f(x)\,dx = \int\limits_{g^{-1}(A)} f(g(t))\,|\det(J_g(t))|\,dt$$

הערה 9.10 נשים לב למספר דברים:

1. ה"מחיר" אותו אנו משלמים תמורת החלפת המשתנים הוא היעקוביאן **בערך מוחלט**.
2. בניגוד למשתנה יחיד, שם ההצבה נועדה לפשט את הפונקציה בתוך האינטגרל, כאן נחפש בעיקר הצבה שתפשט את התחום.
3. יתר על כן, בעוד שבאינטגרל חד־מימדי ההצבה הייתה בדרך כלל נתונה לבחירתנו, באינטגרל רב־מימדי נעבוד בדרך כלל עם רשימה מצומצמת של הצבות ספציפיות.

נציג כמה סוגי הצבות נפוצים:

הקואורדינטות שהן ברירת המחדל שלנו הן הקואורדינטות הקרטזיות.

1. קואורדינטות קוטביות/פולריות:

החלפת המשתנים היא:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

כאשר: $(r,\theta) \in [0,\infty) \times [0,2\pi)$. אפשר גם לקחת קטעים סגורים או פתוחים.

היזכרו בהצגה קוטבית של מספר מרוכב. האינטרוול של θ יכול להיות שונה.

בשביל להפוך קואורדינטות קוטביות לקרטזיות, נבצע:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & x > 0, y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & x = 0, y < 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

היעקוביאן שלנו במקרה הזה הוא:

$$\begin{vmatrix} (r\cos\theta)_r & (r\cos\theta)_\theta \\ (r\sin\theta)_r & (r\sin\theta)_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

2. קואורדינטות גליליות:

כדי להביע נקודה במרחב בעזרת גליל, אנו צריכים שלושה דברים; את הגובה, את הרדיוס של מעגל הבסיס ואת הזווית במעגל הבסיס (אזימוט).

שינוי המשתנים הוא:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$$

כאשר $(r, \theta, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$.

אם נרצה להפוך קואורדינטות גליליות לקואורדינטות קרטזיות, נהפוך את r, θ כמו בקואורדינטות קוטביות.

היעקוביאן במקרה זה הוא: $|J| = r$.

3. קואורדינטות כדוריות:

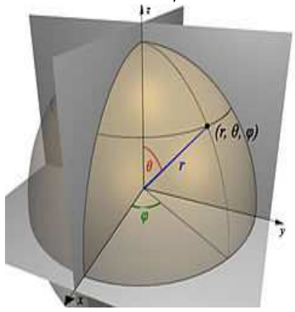
כדי להציג נקודה במרחב בעזרת כדור, אנו זקוקים לשלושה דברים; מרחקה מהראשית, הזווית שלה ביחס לאחד מהצירים (במקרה שלנו, z) ואת הזווית היחס למעגל הגדול במרכז הכדור (אזימוט).

שינוי המשתנים הוא:

$$x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$$

כאשר: $(r,\theta,\phi) \in [0,\infty) \times [0,\pi) \times [0,2\pi)$.

כה אמרה ויקיפדיה:



אם נרצה להביע קואורדינטות כדוריות בעזרת קואורדינטות קרטזיות, השינוי הוא:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

היעקוביאן במקרה זה הוא $|J| = r^2\sin\theta$.

נשתמש בעיקר בהחלפות משתנים אלו. עם זאת, חשוב לזכור - כל עוד אנו שומרים על תנאי המשפט, נוכל להחליף משתנים ככל העולה על רוחנו.

כל אחת מהחלפות המשתנים הללו מקיימת את תנאי המשפט.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל:

$$\iiint\limits_D (x+y+z)\,dxdydz$$

כאשר:

$$D = \left\{ (x,y,z) | \sqrt{y^2+z^2} \le x \le \sqrt{4-y^2-z^2} \right\}$$

<u>פתרון:</u>

x לא משחק את המשחק של z,y עם חזקת 2 ולכן נראה שכדאי לעבור לקואורדינטות גליליות:

$$x=x, y=r\cos\theta, z=r\sin\theta$$

ואם כן התחום הוא:

$$r\leq x\leq\sqrt{4-r^2}$$

לגבי r עצמו נקבל מהתחום של x שמתקיים: $r\leq\sqrt{4-r^2}$ ולכן $r\leq\sqrt{2}$.

r תמיד אי שלילי ולכן סה"כ $0\leq r\leq\sqrt{2}$.

θ נמצאת בין 0 לבין 2π. אם כן:

$$\iiint\limits_D=\int\limits_0^{\sqrt{2}}\int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}}\int\limits_0^{2\pi}(x+r\cos\theta+r\sin\theta)\cdot rd\theta dxdr$$

r שצץ שם הוא היעקוביאן. נחשב את האינטגרל:

$$=\int\limits_0^{\sqrt{2}}\int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}}(rx\theta+r\sin\theta-r\cos\theta)|_0^{2\pi}dxdr=2\pi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}}rxdxdr=$$

$$=\cdots=2\pi$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל:

$$\iiint\limits_D xdxdydz$$

כאשר:

$$D = \left\{ (x,y,z) | \, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0 \right\}$$

<u>פתרון:</u>

הפונקציה שלנו אי זוגית והתחום סימטרי ולכן האינטגרל הוא 0.

נראה זאת ע"י חישוב.

קודם כל, לשם הנוחות, נבצע החלפת משתנים:

$$x = au, y = bv, z = cw$$

היעקוביאן יהיה:

$$|J| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

לכן:

$$\iiint\limits_{D} = \iiint\limits_{D'} au \cdot (abc) \, dudvdw = a^2bc \iiint\limits_{D'} ududvdw$$

כאשר:

$$D' = \left\{ (u,v,w) | \, u^2 + v^2 + w^2 \leq 1, u \geq 0 \right\}$$

כעת מאד מתבקש לעבור לקואורדינטות כדוריות:

$$u = r \sin\theta \cos\phi, v = r \sin\theta \sin\phi, w = r \cos\theta$$

מכיוון שאנו רוצים $u \geq 0$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$r \in [0,1)$, $\phi \in [0,2\pi)$ ואם כן:

$$\iiint\limits_{D'} = a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\sin\theta\cos\phi)\left(r^2\sin\theta\right)drd\phi d\theta$$

כאשר $r^2\sin\theta$ הוא היעקוביאן שלנו.

כמו שאמרנו, לאחר שנחשב את האינטגרל נקבל 0.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את שטח האליפסה:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$$

<u>פתרון:</u>

שטח של צורה גיאומטרית הוא האינטגרל של 1 על התחום.

כלומר, נחשב את:

$$\iint\limits_D 1dxdy$$

כאשר:

$$D=\left\{(x,y)|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$$

נחליף למעין קואורדינטות קוטביות, תוך התחשבות בכך שלאליפסה מוקדים שונים:

$$x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta$$

היעקוביאן במקרה זה הוא $|J|=abr$.

במקרה שלנו, $r \in [0,1]$ ולכן סה"כ האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_D = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} abrd\theta dr = \pi ab$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל:

$$\iiint\limits_D dxdydz$$

כאשר:

$$D = \left\{ (x,y,z) | \, 1 \le x^2 + y^2 \le 4 - z^2 \right\}$$

<u>פתרון:</u>

יש קצת התלבטות בין קואורדינטות גליליות לכדוריות.

אם נשתמש בגליליות:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$$

נקבל שהתחום של r הוא :

$$1 \le r \le \sqrt{4 - z^2}$$

מה שמכריח את z להיות בתחום $-\sqrt{3} \le z \le \sqrt{3}$ ואם כן האינטגרל שלנו הוא:

$$\iiint\limits_D dxdydz = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int\limits_0^{\sqrt{4-z^2}} \int\limits_0^{2\pi} rd\theta drdz$$

r שנכנס שם הוא היעקוביאן שלנו. נחשב את האינטגרל:

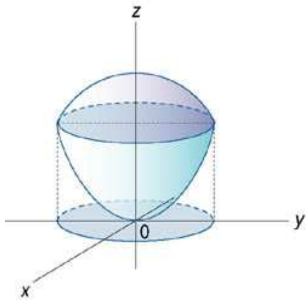
$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{0}^{\sqrt{4-z^2}} 2\pi r dr dz = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} r^2 |_1^{\sqrt{4-z^2}} dz = \cdots = 6\sqrt{3}\pi$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את נפח הגוף הכלוא בין הספירה $x^2+y^2+z^2=6$ לבין הפרבולואיד $z=x^2+y^2$.

<u>פתרון:</u>

אנו מדברים על היצור הבא:



ננסה להבין מהו מעגל החיתוך (כדי שנוכל להטיל אותו על מישור xy).

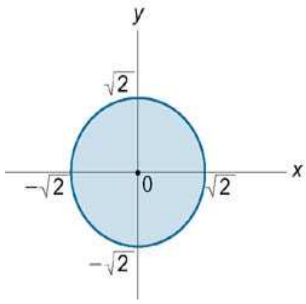
אם כן, החיתוך בין הפרבולואיד לספירה מתרחש כאשר:

$$z+z^2=6$$

כלומר $z=2, z=-3$. $z=-3$ כלל לא בתחום שלנו, ולכן $z=2$ הוא הפתרון.

הספירה נמצאת מעל הפרבולואיד, ולכן $x^2+y^2 \leq z \leq \sqrt{6-x^2-y^2}$.

אם נטיל המעגל על מישור xy נקבל:



כפי שאמרנו, $x^2+y^2=z=2$ ולכן זהו מעגל שרדיוסו $\sqrt{2}$.

לכן, אפשר לומר $0\leq y\leq\sqrt{2-x^2}$, וגם $-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$.

z לא משחק את המשחק של x,y במעגל ולכן נעבור לקואורדינטות גליליות:

$$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$$

$x^2+y^2=r^2$ ולכן נקבל:

$$r^2\leq z\leq\sqrt{6-r^2},0\leq r\leq\sqrt{2},0\leq\theta\leq 2\pi$$

היעקוביאן הוא r, ולכן:

$$V=\iiint\limits_D 1dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\sqrt{2}}\int\limits_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}}rdzdrd\theta=2\pi\int\limits_0^{\sqrt{2}}r\left(\sqrt{6-r^2}-r^2\right)dr=\frac{2\pi\left(6\sqrt{6}-11\right)}{3}$$

<u>תרגיל:</u>

בעזרת ההעתקה $u=x,v=z-y,w=xy$ חשבו את האינטגרל:

$$\iiint\limits_G (z-y)^2\,xydxdydz$$

כאשר G הוא התחום המוגבל על ידי המשטחים:

$$x=1,x=3,z=y,z=y+1,xy=2,xy=4$$

<u>פתרון:</u>

ראשית, נבין מה ההעתקה עושה לתחום:

$$u=x,1\leq x\leq 3\Longrightarrow 1\leq u\leq 3$$

$$v=z-y,0\leq z-y\leq 1\Longrightarrow 0\leq v\leq 1$$

$$w = xy, 2 \leq xy \leq 4 \Longrightarrow 2 \leq w \leq 4$$

מהי היעקוביאן? אנו עוברים מ$-$ (x,y,z) ל$-$ (u,v,w), ולכן אנו צריכים את: $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|$.

מההעתקה הנתונה לנו, לעומת זאת, נוכל לחשב דווקא את: $\left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|$.

אך אל דאגה; לפי משפט הפונקציה ההפוכה, $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|^{-1} = \left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|$.

אם כן,

$$\left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right| = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = -x = -u$$

כלומר:

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = (-u)^{-1} = -\frac{1}{u}$$

נזכור שאנו צריכים ערך מוחלט, ולכן בסך הכל $\frac{1}{u}$. לכן:

$$\iiint\limits_G (z-y)^2 \, xydxdydz = \int\limits_2^4 \int\limits_1^3 \int\limits_0^1 v^2 w \cdot \frac{1}{u} dvdudw = 2\ln 3$$

<u>דוגמה:</u>

היזכרו בנוסחה לחישוב נפח גוף סיבוב סביב ציר ה$-x$, כאשר $a \leq x \leq b$:

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx$$

איך היא נובעת מהנוסחה $V = \iiint dxdydz$?

במקרה של גוף סיבוב סביב ציר ה$-x$, המשתנים y,z יוצרים מעגל שרדיוסו (בכל x) הוא $f(x)$.

לכן, אם נעבור לקואורדינטות גליליות:

$$y = r\cos\theta, z = r\sin\theta, x = x$$

התחום יהיה $(x,r,\theta) \in [a,b]\times[0,f(x)]\times[0,2\pi]$. היעקוביאן הוא r, ולכן:

$$V = \iiint dxdydz = \int_a^b \int_0^{f(x)} \int_0^{2\pi} rd\theta drdx = 2\pi \cdot \int_a^b \int_0^{f(x)} rdrdx = 2\pi \cdot \int_a^b \left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=f(x)} dx$$

$$= \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

וזו הנוסחה שלנו.

היזכרו גם בנוסחה לחישוב נפח גוף סיבוב סביב ציר ה$-y$:

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$$

ובנוסחה לחישוב אורך גרף של פונקציה במשתנה יחיד:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

האם הן נובעות מהנוסחאות שלנו?

אם כבר הזכרנו נפח גוף סיבוב, נציין את משפט פאפוס:

משפט 9.11 משפט פאפוס:

יהי D תחום במישור ויהי l ישר. נפח גוף הסיבוב המתקבל מסיבוב התחום D סביב הישר l נתון על ידי הנוסחה:

$$V = 2\pi R_{CM}A$$

כאשר R_{CM} הוא מרחקו של מרכז הכובד של התחום מהישר ו$-A$ הוא שטח התחום.

9.6 שימושים גיאומטריים ופיזיקליים לאינטגרלים רב־מימדיים

כבר ראינו מספר דוגמאות לשימושים גיאומטריים לאינטגרלים רבי־מימדים. נזכיר כאן גם את הנוסחה הבאה:

משפט 9.12 חישוב שטח פנים באמצעות אינטגרל כפול:

יהי משטח הנתון על ידי הפונקציה $z = f(x, y)$. **שטח הפנים** של המשטח מעל התחום R נתון על ידי:

$$S = \iint\limits_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

<u>לדוגמה:</u>

חשבו את שטח הפנים של ספירה עם רדיוס a.

<u>פתרון:</u>

אנו רוצים להציג את הספירה כפונקציה $z = f(x, y)$, וזה לא אפשרי.

לכן, נחשב את שטח הפנים של ההמיספירה העליונה ונכפיל ב־2.

אם כן, על ההמיספירה העליונה מתקיים: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. הנגזרות החלקיות הן:

$$z_x = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z}$$

$$z_y = \frac{-2y}{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{y}{z}$$

ולכן:

$$\frac{1}{2}S = \iint\limits_R \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{z}\right)^2 + \left(-\frac{y}{z}\right)^2} dxdy = \iint\limits_R \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} dxdy = \iint\limits_R \frac{a}{z} dxdy$$

מכיוון שאנו על ההמיספירה העליונה, ובספירה מתקיים: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; a מבטא את הרדיוס ולכן $a > 0$.

נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

כאשר $0 \le r \le a, 0 \le \theta \le 2\pi$.

מכיוון ש: $r^2 = x^2 + y^2$ נקבל $z = \sqrt{a^2 - r^2}$. היעקוביאן הוא r ולכן:

$$\iint\limits_R \frac{a}{z}dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}rdrd\theta = 2\pi a \cdot \int\limits_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr$$

נציב $t = r^2$, לכן $dt = 2rdr$ ולכן:

$$= \pi a \cdot \int \frac{1}{\sqrt{a^2-t}}dt = -2\pi a\sqrt{a^2-t} = -2\pi a\ \sqrt{a^2-r^2}\Big|_{r=0}^{r=a} = 2\pi a^2$$

נזכור שזהו שטח הפנים של המיספירה, ולכן שטח הספירה הוא $4\pi a^2$.

הגדרה 9.13 יהי G גוף עם פונקציית צפיפות ρ, אזי **המסה** של G מוגדרת על ידי:

$$m = \iiint\limits_G \rho(x,y,z)\,dxdydz$$

<u>לדוגמה:</u>

חשבו את המסה של כדור B ברדיוס R שצפיפותו ρ פרופורציונאלית למרחק מהמרכז בריבוע, כלומר $\rho = ar^2$ (השתמשו בקואורדינטות כדוריות).

<u>פתרון:</u>

אם כן, בקואורדינטות היעקוביאן הוא $r^2\sin\theta$ ולכן:

$$m = \iiint\limits_B ar^2 \cdot r^2\sin\theta drd\phi d\theta = a\iiint\limits_B r^4\sin\theta drd\phi d\theta$$

בקואורדינטות כדוריות, $(r,\theta,\phi) \in [0,R) \times [0,\pi) \times [0,2\pi)$ ולכן:

$$= a\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r^4 \sin\theta dr d\phi d\theta = a\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta \cdot \left(\frac{r^5}{5}\right)\Big|_{r=0}^{r=R} = \frac{aR^5}{5}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta d\phi d\theta$$

$$= \frac{2\pi aR^5}{5}\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \frac{4a\pi R^5}{5}$$

הגדרה 9.14 יהי G גוף עם פונקציית צפיפות ρ. **המומנטים הסטטיים** של G ביחס למישורי הצירים מוגדרים על ידי:

$$M_{xy} = \iiint_G z\rho(x,y,z)\,dxdydz$$

$$M_{xz} = \iiint_G y\rho(x,y,z)\,dxdydz$$

$$M_{yz} = \iiint_G x\rho(x,y,z)\,dxdydz$$

מרכז הכובד של G הוא נקודה ששיעוריה נתונים על ידי:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

כאשר M_{xy}, M_{yz}, M_{xz} הם המומנטים הסטטיים ו$-m$ היא המסה.

<u>לדוגמה:</u>

חשבו את מרכז הכובד של חצי כדור G הומוגני (ρ קבועה) שרדיוסו R. אפשר "להניח" את הכדור בכל מקום שתרצו ב$-\mathbb{R}^3$.

<u>פתרון:</u>

נניח את חצי הכדור בתחום $z \geq 0$ כך שמרכזו בראשית.

נשתמש בנוסחה:

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{\iiint_G z\rho\left(x,y,z\right)dxdydz}{\iiint_G \rho\left(x,y,z\right)dxdydz}=\frac{\iiint_G zdxdydz}{\iiint_G dxdydz}=\frac{\iiint_G xdxdydz}{V}$$

באופן דומה:

$$\bar{y}=\frac{\iiint_G ydxdydz}{V},\bar{z}=\frac{\iiint_G zdxdydz}{V}$$

כאשר V הוא נפח חצי הכדור, כלומר $V=\frac{2\pi R^3}{3}$. הצפיפות מצטמצמת.

כעת, מכיוון שהפונקציה x אי־זוגית ביחס ל־x והתחום סימטרי ביחס ל־x, נקבל $\iiint_G xdxdydz=0$ ולכן $\bar{x}=0$.

באופן דומה, $\bar{y}=0$.

כדי לחשב את המונה של $\bar{z}$, נעבור לקואורדינטות כדוריות.

מכיוון שאנו נמצאים ב־$z\geq 0$, $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$. הקואורדינטות האחרות מקיימות:

$$0\leq r\leq R,0\leq\phi\leq 2\pi$$

היעקוביאן הוא $r^2\sin\theta$, $z=r\cos\theta$ ולכן:

$$\iiint\limits_G zdxdydz=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^R r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta drd\theta d\phi=2\pi\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^R r^3\cdot\frac{\sin 2\theta}{2}drd\theta$$

$$=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\cdot\left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R}d\theta=\frac{\pi R^4}{4}\cdot\left(-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi R^4}{4}$$

לכן:

$$\bar{z}=\frac{\frac{\pi R^4}{4}}{\frac{2\pi R^3}{3}}=\frac{3R}{8}$$

ומרכז הכובד הוא $\left(0,0,\frac{3R}{8}\right)$.

הגדרה 9.15 יהי G עם פונקציית צפיפות ρ. **מומנטי ההתמד** (אינרציה) ביחס למישורי הצירים נתונים על ידי:

$$I_{xy} = \iiint\limits_G z^2 \rho\left(x,y,z\right) dxdydz$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_G y^2 \rho\left(x,y,z\right) dxdydz$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_G x^2 \rho\left(x,y,z\right) dxdydz$$

מומנטי ההתמד ביחס לצירים נתונים על ידי:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}$$

$$I_y = I_{xy} + I_{yz}$$

$$I_z = I_{xz} + I_{yz}$$

מומנט ההתמד ביחס לראשית נתון על ידי:

$$I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}$$

<u>לדוגמה:</u>

חשבו את מומנטי ההתמד ביחס לציר ה$-z$ של חרוט הומוגני G עם רדיוס בסיס R וגובה H שקודקודו בראשית ובסיסו מקביל למישור xy.

<u>פתרון:</u>

נסמן את הצפיפות ב$-\rho_0$.

אם כן:

$$I_z = I_{xz} + I_{yz} = \iiint\limits_G \left(x^2 + y^2\right) \rho\left(x, y, z\right) dxdydz = \rho_0 \cdot \iiint\limits_G \left(x^2 + y^2\right) dxdydz$$

נעבור לקואורדינטות גליליות:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$$

היעקוביאן הוא r, $x^2 + y^2 = r^2$. התחומים הם:

$$0 \le r \le R, \frac{Hr}{R} \le z \le H, 0 \le \theta \le 2\pi$$

ולכן:

$$I_z = \rho_0 \cdot \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R \int\limits_{\frac{Hr}{R}}^H r^2 \cdot r dz dr d\theta = 2\pi\rho_0 \cdot \int\limits_0^R r^3 \cdot \left(z\right)\Big|_{z=\frac{Hr}{R}}^{z=H} = 2\pi H\rho_0 \cdot \int\limits_0^R \left(r^3 - \frac{r^4}{R}\right) dr$$

$$= 2\pi H\rho_0 \cdot \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5R}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R} = \frac{\pi H\rho_0 R^4}{10}$$

הגדרה 9.16 יהי G גוף עם פונקציית צפיפות ρ. **טנזור ההתמד** נתון על ידי:

$$I = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{pmatrix}$$

זו מטריצה סימטרית ולכן לכסינה.

הערכים העצמיים של המטריצה נקראים **מומנטי ההתמד העיקריים**.

הגדרה 9.17 יהי B גוף עם פונקציית צפיפות ρ. **הפוטנציאל הניוטוני** של B נתון על ידי:

$$u\left(x,y,z\right)=\iiint\limits_{B}\frac{\rho\left(\xi,\eta,\zeta\right)}{r}d\xi d\eta d\zeta$$

כאשר $r=\sqrt{\left(\xi-x\right)^{2}+\left(\eta-y\right)^{2}+\left(\zeta-z\right)^{2}}$.

בעזרת הפוטנציאל אפשר לחשב את **כוח המשיכה** של הגוף בנקודה על ידי:

$$F=-Gm\cdot\nabla u$$

כאשר m היא המסה בנקודה ו־G קבוע הגרביטציה.

הערה 9.18 יש הגדרות שקולות למצב דו־מימדי (לוחית במקום גוף).

9.7 אינטגרלים לא אמיתיים

הגדרה 9.19 **אינטגרל לא אמיתי** הוא אינטגרל מהצורה:

$$\iint\limits_{D}fds$$

כך שהתחום D אינו חסום או שהפונקציה f אינה חסומה (אינה רציפה).

אפשר, כמובן, להכליל זאת למימדים גבוהים יותר.

הערה 9.20 בקטע זה נזכיר רק אינטגרלים לא אמיתיים שבהם התחום לא חסום, או הפונקציה אינה חסומה ויש לה מספר סופי בלבד של נקודות אי־רציפות.

אז איך מחשבים אינטגרל כזה?

ראשית, כאשר התחום D לא חסום, נתבונן בתחום: $D_R=D\cap B\left[0,R\right]$ לכל $R>0$.

נגדיר:

$$\iint\limits_{D}fds=\lim_{R\longrightarrow\infty}\iint\limits_{D_R}fds$$

שנית, אם הפונקציה לא חסומה בתחום D, כלומר יש נקודת אי־רציפות בנקודה כלשהי a בתחום. נתבונן בתחום: $D_R = D \backslash B\left[a,R\right]$ לכל $R>0$. נגדיר:

$$\iint\limits_{D} f ds = \lim_{R\longrightarrow 0} \iint\limits_{D_R} f ds$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל:

$$\iint\limits_{D} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

כאשר D הוא הרביע הראשון.

<u>פתרון:</u>

לכל $R>0$, נסמן:

$$D_R = D \cap \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<R^2\right\}$$

נחשב את האינטגרל על D_R:

$$\iint\limits_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{R} e^{-r^2}\cdot r dr d\theta$$

עברנו לקואורדינטות קוטביות: $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ כי אנחנו ברביע הראשון.

את האינטגרל הזה קל לחשב:

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-e^{-r^2}}{2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R} d\theta = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-e^{-R^2}\right) d\theta = \frac{\pi\left(1-e^{-R^2}\right)}{4}$$

ולכן:

$$\iint\limits_{D} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{R\longrightarrow\infty} \iint\limits_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{R\longrightarrow\infty} \frac{\pi\left(1-e^{-R^2}\right)}{4} = \frac{\pi}{4}$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את נפח הגוף הכלוא מתחת לגרף הפונקציה:

$$f(x,y)=\frac{y}{1-x^2-y^2}$$

ומעל החיתוך של מעגל היחידה והרביע הראשון.

<u>פתרון:</u>

הנפח נתון על ידי:

$$V=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{y}{1-x^2-y^2}dydx$$

נזכור שהתחום שלנו הוא: $D=\left\{x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}$.

נבצע החלפת משתנים באינטגרל הפנימי: $w=x^2+y^2$. לכן, $dw=2ydy$, ו: $x^2\le w\le 1$. לכן:

$$V=\int_0^1\int_{x^2}^1\frac{1}{2\sqrt{1-w}}dwdx=\int_0^1\left(-\sqrt{1-w}\right)\Big|_{w=x^2}^{w=1}dx=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$

הצבה טריגונומטרית תעבוד: $x=\sin\theta$ ואז $dx=\cos\theta d\theta$:

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{\pi}{4}$$

וזהו האינטגרל.

9.8 חישוב אינטגרלים חד־מימדיים באמצעות אינטגרלים רב־מימדיים

אין בחלק הזה חומר חדש, אלא הסתכלות חדשה על אינטגרלים רב־מימדיים ־ ככלי לפתירת אינטגרלים חד־מימדיים.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^3}$$

<u>פתרון:</u>

נסמן:

$$\varphi\left(y\right)=\int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2}$$

נגזור ונקבל:

$$\varphi'\left(y\right)=-\int_0^1 \frac{2ydx}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-\frac{1}{y^2}\arctan\frac{1}{y}-\frac{1}{y\left(1+y^2\right)}$$

לכן:

$$-\int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-\frac{1}{2y^3}\arctan\frac{1}{y}-\frac{1}{2y^2\left(1+y^2\right)}$$

נגזור שוב ואחרי צמצום נקבל:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^3}=\frac{3}{8y^5}\arctan\frac{1}{y}+\frac{5y^2+3}{8y^4\left(1+y^2\right)^2}$$

נציב $y=a$ ונקבל את הפתרון.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$$

כאשר $-1 < a < b$.

<u>פתרון:</u>

נתבונן בפונקציה x^y במלבן $[0,1] \times [a,b]$:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \frac{1}{\ln x} \cdot x^y\Big|_{y=a}^{y=b} dx = \int_0^1 \int_a^b x^y dy dx =$$

נחליף את סדר האינטגרציה:

$$= \int_a^b \int_0^1 x^y dx dy = \int_a^b \left. \frac{x^{y+1}}{y+1} \right|_{x=0}^{x=1} dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln(b+1) = \ln(a+1)$$

ולכן:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

<u>פתרון:</u>

נגדיר:

$$F(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2} dx$$

נגזור:

$$F'(y) = \int_0^y \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)} dx + \frac{\ln\left(1+y^2\right)}{1+y^2}$$

נפרק את האינטגראנד לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{1+y^2}\cdot\left(\frac{x+y}{1+x^2}-\frac{y}{1+xy}\right)$$

ולכן האינטגרל שקיבלנו אחרי הגזירה הוא:

$$\frac{1}{1+y^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+y\arctan x-\ln\left(1+xy\right)\right)\Bigg|_{x=0}^{x=y}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+y^2}\ln\left(1+y^2\right)+\frac{2y}{1+y^2}\arctan y\right)-\frac{\ln\left(1+y^2\right)}{1+y^2}$$

אם כן:

$$F'\left(y\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+y^2}\ln\left(1+y^2\right)+\frac{2y}{1+y^2}\arctan y\right)$$

לכן: (שימו לב שזו נגזרת של מכפלה)

$$F\left(y\right)=\frac{1}{2}\arctan y\cdot\ln\left(1+y^2\right)$$

במקרה שלנו:

$$\int_0^1\frac{\ln\left(1+x\right)}{1+x^2}dx=F\left(1\right)=\frac{1}{2}\arctan 1\cdot\ln\left(1+1^2\right)=\frac{\pi\ln 2}{8}$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל: $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$.

<u>פתרון:</u>

נשתמש בתוצאה מתרגיל קודם. על הרביע הראשון,

$$\iint e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}$$

הפונקציה זוגית ביחס לשני המשתנים ותמיד חיובית ולכן על כל המישור:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = 4\cdot\frac{\pi}{4} = \pi$$

מצד שני,

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{R\longrightarrow\infty}\int\limits_{-R}^{R}\int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

כלומר, אנו מכסים את המישור באמצעות ריבועים גדלים והולכים (שמרכזם בראשית ואורך צלעותיהם $2R$). נשתמש באינטגרל נשנה:

$$= \lim_{R\longrightarrow\infty}\int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\cdot\int\limits_{-R}^{R} e^{-y^2}dy = \lim_{R\longrightarrow\infty}\left(\int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\right)^2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

כלומר:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

תרגילים נוספים

1. חשבו את האינטגרלים $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ בתחום D.

   (א) $\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}dxdy$ כאשר $D = [0,1]\times[1,2]$.

   (ב) $\iint_D \cos(x+y)\,dxdy$ כאשר $D = \left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2$.

   (ג) $\iint_D \left(x-y^2\right)dxdy$ כאשר $D = [2,3]\times[1,2]$.

2. חשבו את האינטגרלים $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ בתחום D.

(א) $\iint_D (x-y)\,dxdy$

כאשר $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\le x\le 1, x\le y\le 2-x^2\right\}$.

(ב) $\iint_D \sin(x+y)\,dxdy$ כאשר D התחום החסום על ידי הישרים:

$$y=x, x+y=\frac{\pi}{2}, y=0$$

(ג) $\iint_D e^x dxdy$ כאשר D הוא המשולש שקודקודיו הם הנקודות:

$$A(0,0), B(0,1), C(1,1)$$

3. חשבו את האינטגרלים $\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$ בתחום D.

(א) $\iiint_D xy^2z^3dxdydz$ כאשר D התחום החסום על ידי:

$$z=xy, y=x, x=0.x=1, z=0$$

(ב) $\iiint_D ydxdydz$ כאשר D התחום החסום על ידי:

$$z=y, z=0, y=1-x^2$$

4. אני בונה מגדלור של אוהבים, שבסיסו בתחום D. חשבו את שטחו של בסיס המגדלור כאשר:

(א) D הוא התחום הכלוא בין העקומות $y=\sin x, y=\cos x$ בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{4}$.

(ב) D הוא התחום הכלוא בין העקומות $y^2=-x, 3y-x=4$.

5. בניתי את המגדלור בתומן (אוקטנט) הראשון. חסמתי אותו על ידי הפרבולואיד $z=9x^2+y^2$ מלמעלה ועל ידי המישורים $x=3, y=2$ מהצדדים (בנוסף למישורים $x=0, y=0$ החוסמים אותו מהצדדים והמישור $z=0$ החוסם אותו מלמעלה). חשבו את נפח המגדלור.

6. בהמלצתו של פרנק אושן עזבתי את המגדלורים לטובת פירמידות. חשבו את נפח הפירמידה G, כאשר:

(א) G הפירמידה בתומן הראשון שפיאותיה הן מישורי הצירים והמישור $3x+6y+4z=12$.

(ב) G הפירמידה בתומן הראשון שפיאותיה הן מישורי הצירים והמישור $x+y+z=5$.

7. החליפו את סדר האינטגרציה. ציירו ו"סובבו" במידת הצורך.

(א) $\int_1^2\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f\left(x,y\right)dydx$.

(ב) $\int_{-1}^1\int_{x^3}^{\sqrt{2-x^2}} f\left(x,y\right)dydx$.

(ג) $\int_0^2\int_{\frac{4-x^2}{4}}^{\sqrt{4-x^2}} f\left(x,y\right)dydx$.

8. חשבו את האינטגרלים הבאים באמצעות החלפת משתנים. כדאי להסביר למה הפונקציה שבחרתם אכן חח"ע.

(א) $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ כאשר:
$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{2}\right\}$. האינטגרל לא אמיתי והפעולות לא באמת חוקיות כפי שלמדנו. זרמו.

(ב) $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$ כאשר:
$D=\{1\le x+y\le 2, x\ge 0, y\ge 0\}$. נסו: $u=x+y, v=x-y$.

(ג) $\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ כאשר D הוא מעגל היחידה.

(ד) $\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dxdy$ כאשר:
D חסום על ידי הקווים: $x+y=1, x=0, y=0$.

(ה) $\iint_D \frac{x+3y}{x^4}e^{\frac{y}{x^3}}dxdy$ כאשר:
$D=\left\{x^3\le y\le 4x^3, \frac{1}{2}\le x+y\le 1\right\}$.

(ו) $\iint_D \frac{2x^2e^{x^2}}{x^2+y^2}dxdy$ כאשר:
$D=\{0\le x\le 2, 0\le y\le x\}$.

(ז) $\iint_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}dxdy$ כאשר:

$D=\left\{\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq 1\right\}$.

9. חשבו את האינטגרלים הבאים באמצעות החלפת משתנים.

(א) $\iiint_D (x+y+z)^2\,dxdydz$כאשר:

$D=\left\{x^2+y^2+z^2\leq 3, x^2+y^2\leq 2z\right\}$.

(ב) $\iiint_D dxdydz$ כאשר:

$D=\left\{x^2+y^2\leq z^2, x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}$.

(ג) $\iiint_D (yz+zx)\,dxdydz$ כאשר D נמצא בתומן הראשון ומוגבל על ידי המשטחים:

$x=0, z=0, y=x, x^2+y^2+z^2=R^2$.

10. חשבו את הנפחים הבאים:

(א) נפח החרוט שגובהו H ורדיוס הבסיס R.

(ב) נפח הכדור עם רדיוס R.

(ג) נפח האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

(ד) הגוף הכלוא בין הפרבולואידים:

$z=x^2+y^2, z=1-x^2-y^2$.

(ה) הגוף הכלוא בין החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ לבין הפרבולואיד $z=2-x^2-y^2$.

פתרונות

נאטגרץ עד כלות הנשימה.

1. נבצע אינטגרציה פעם כך ופעם כך:

(א) האינטגרל הוא:

$$\iint\limits_D \frac{1}{(x+y)^2}dxdy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_1^2\frac{1}{(x+y)^2}dy\right)dx=\int\limits_0^1\left(-\frac{1}{x+y}\right)_{y=1}^{y=2}dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\left(\ln(x+1)-\ln(x+2)\right)_{x=0}^{x=1}=2\ln 2-\ln 3=\ln\frac{4}{3}$$

(ב) האינטגרל הוא:

$$\iint_D \cos(x+y)\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)\,dx\right)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin(x+y)\right)_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}dy=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right)-\sin y\right)dy=\left(\cos y-\cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right)\right)_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}}=0$$

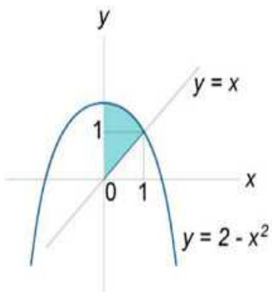
(ג) האינטגרל הוא:

$$\iint_D \left(x-y^2\right)dxdy=\int_2^3\left(\int_1^2\left(x-y^2\right)dy\right)dx=\int_2^3\left(xy-\frac{y^3}{3}\right)_{y=1}^{y=2}dx=\int_2^3\left(2x-\frac{8}{3}-x+\frac{1}{3}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{7}{3}x\right)_{x=2}^{x=3}=\frac{9}{2}-7-\frac{4}{2}+\frac{14}{3}=\frac{1}{6}$$

2. נבצע אינטגרציה פעם כך ופעם כך:

(א) התחום הוא:

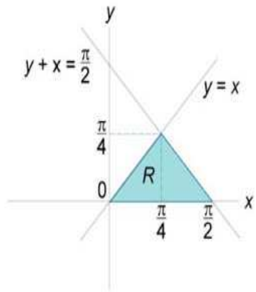


האינטגרל הוא:

$$\iint_D (x-y)\,dxdy=\int_0^1\left(\int_x^{2-x^2}(x-y)\,dy\right)dx=\int_0^1\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)_{y=x}^{y=2-x^2}dx=$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{3x^2}{2} + 2x - 2\right) dx = \left(-\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + x^2 - 2x\right)_{x=0}^{x=1} = -\frac{17}{20}$$

(ב) התחום הוא:

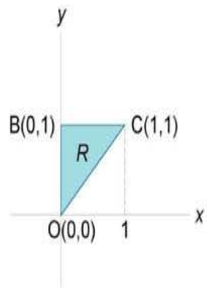


האינטגרל הוא:

$$\iint_D \sin(x+y)\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-y} \sin(x+y)\,dx \right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\cos(x+y)\right)_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}-y} dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2y dy = \left.\frac{\sin 2y}{2}\right|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

(ג) התחום הוא:



האינטגרל הוא:

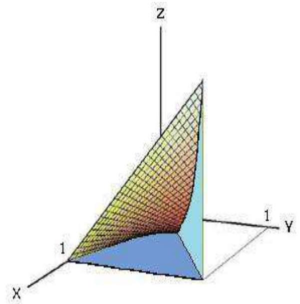
$$\iint_D e^x dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^1 e^x dy \right) dx = \int_0^1 \left(ye^x\right)_{y=x}^{y=1} dx = \int_0^1 e^x (1-x)\,dx$$

בחלקים:

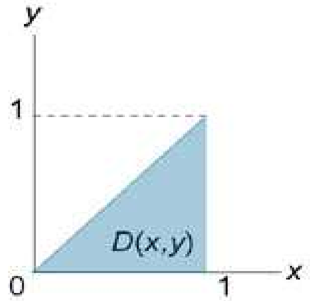
$$= \left(e^x\left(1-x\right)\right)_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 e^x dx = e-2$$

3. נבצע אינטגרציה פעם כך, פעם כך ופעם כך:

(א) התחום הוא:



ההטלה של התחום על מישור xy נותנת את התחום:



האינטגרל הוא:

$$\iiint_D xy^2z^3dxdydz = \int_0^1\left(\int_0^x\left(\int_0^{xy} xy^2z^3dz\right)dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_0^x\left(\frac{xy^2z^4}{4}\right)_{z=0}^{z=xy}dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^x \frac{x^5y^6}{4}dy\right)dx = \int_0^1\left(\frac{x^5y^7}{28}\right)_{y=0}^{y=x}dx = \int_0^1 \frac{x^{12}}{28}dx = \left.\frac{x^{13}}{364}\right|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{364}$$

(ב) האינטגרל הוא:

$$\iiint\limits_D ydxdydz = \int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{0}^{1-x^2}\left(\int\limits_{0}^{y} ydz\right)dy\right)dx = \int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{0}^{1-x^2}(yz)_{z=0}^{z=y}dy\right)dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{0}^{1-x^2} y^2dy\right)dx\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{y^3}{3}\right)_{y=0}^{y=1-x^2}dx = \int\limits_{-1}^{1}\frac{\left(1-x^2\right)^3}{3}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-3x^2+3x^4-x^6\right)dx = \frac{1}{3}\left(x-x^3+\frac{3x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\right)_{x=-1}^{x=1} = \frac{32}{105}$$

4. נשתמש באינטגרל כפול כדי לחשב את השטח.

(א) במקרה זה:

$$S = \iint\limits_D 1dxdy = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int\limits_{\sin x}^{\cos x} 1dy\right)dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx = (\cos x+\sin x)_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}-1$$

עלינו כמובן לבדוק מי מבין הפונקציות $\sin x, \cos x$ היא העליונה בתחום שלנו.

(ב) במקרה זה:

$$S = \iint\limits_D 1dxdy = \int\limits_{-4}^{1}\left(\int\limits_{3y-4}^{-y^2} 1dx\right)dy = \int\limits_{-4}^{1}\left(-y^2-3y+4\right)dy = \left(-\frac{y^3}{3}-\frac{3y^2}{2}+4y\right)_{y=-4}^{y=1} = \frac{125}{6}$$

הנקודות $-1, 4$ הן נקודות החיתוך בין העקומות.

5. למה מכרתי את הספינה למה. אנו צריכים לחשב את השטח שכלוא בין הפונקציה $f(x,y) = 9x^2+y^2$ לבין המישור xy, שבו התחום הוא מלבן:

$$0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2$$

ולכן הנפח הוא:

$$V = \int\limits_{0}^{3}\left(\int\limits_{0}^{2}\left(9x^2+y^2\right)dy\right)dx = \int\limits_{0}^{3}\left(9x^2y+\frac{y^3}{3}\right)_{y=0}^{y=2}dx = \int\limits_{0}^{3}\left(18x^2+\frac{8}{3}\right)dx =$$

$$= \left(6x^3 + \frac{8}{3}x\right)_{x=0}^{x=3} = 170$$

וזהו נפח המגדלור.

6. נחשב את הנפח בעזרת אינטגרלים משולשים.

(א) אם כן, בסיס הפירמידה נח על המישור: $3x+6y+4z=12$, ולכן נוכל לכתוב:

$$0 \le z \le \frac{12-3x-6y}{4} = 3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}y$$

כעת, ההטלה של הפירמידה על המישור xy תיתן את התחום:

$$0 \le x \le 4-2y, 0 \le y \le 2$$

החלטתי לגוון קצת ולהביע את x כפונקציה של y.

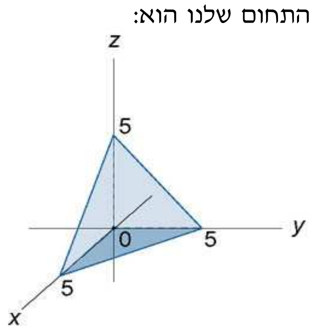
לפיכך, הנפח הוא:

$$V = \iiint\limits_G 1dxdydz = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{4-2y}\left(\int\limits_0^{3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}y} 1dz\right)dx\right)dy = \int\limits_0^2\left(\int\limits_0^{4-2y}\left(3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}y\right)dx\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(3x - \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}xy\right)_{x=0}^{x=4-2y} dy = \int\limits_0^2 \left(12 - 6y - \frac{48-48y+12y^2}{8} - \frac{12y-6y^2}{2}\right)dy =$$

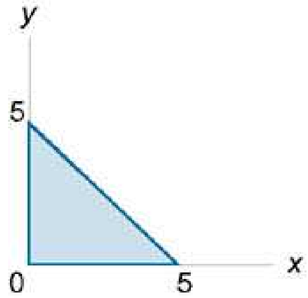
$$= \left(12y - 3y^2 - 6y + 3y^2 - \frac{y^3}{2} - 3y^2 + y^3\right)_{y=0}^{y=2} = 4$$

(ב) התחום שלנו הוא:



כלומר: $0 \leq z \leq 5 - x - y$.

נטיל את הפירמידה על המישור xy ונקבל את התחום:



שבו נוכל לכתוב: $0 \leq y \leq 5 - x$.

לבסוף, $0 \leq x \leq 5$. לפיכך, הנפח הוא:

$$V = \iiint\limits_G 1 dxdydz = \int\limits_0^5 \left(\int\limits_0^{5-x} \left(\int\limits_0^{5-x-y} 1dz \right) dy \right) dz = \int\limits_0^5 \left(\int\limits_0^{5-x} (5 - x - y)\, dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^5 \left(5y - xy - \frac{y^2}{2} \right)_{y=0}^{y=5-x} dx = \int\limits_0^5 \left(25 - 5x - 5x + x^2 - \frac{25 - 10x + x^2}{2} \right) dx =$$

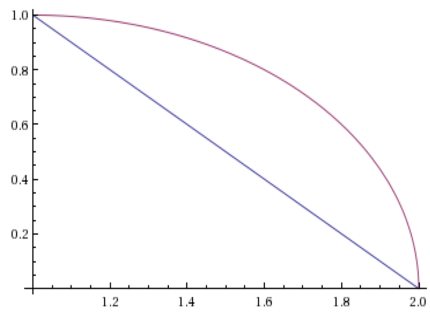
$$= \left(25x - 5x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{25}{2}x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} \right)_{x=0}^{x=5} = \frac{125}{6}$$

7. נחליף את סדר האינטגרציה.

(א) האינטגרל הוא:

$$\int\limits_1^2 \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\, dydx$$

אם כן, התחום הוא:



כפי שראינו בעבר, $y=\sqrt{2x-x^2}$ נותן לנו $x=\pm\sqrt{1-y^2}+1$ בהתאם לתחום.

$y=2-x$ נותן $x=2-y$. אם נסובב את התחום שלנו, נקבל:

$$0\leq y\leq 1, 2-y\leq x\leq \sqrt{1-y^2}+1$$

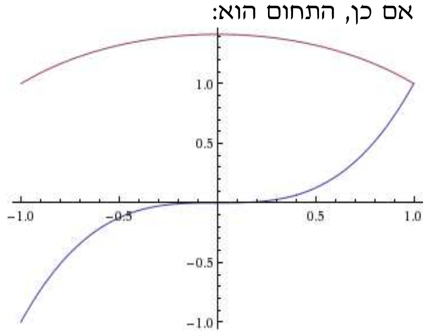
ולכן:

$$\int\limits_1^2\int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f\left(x,y\right)dydx=\int\limits_0^1\int\limits_{2-y}^{\sqrt{1-y^2}+1} f\left(x,y\right)dxdy$$

(ב) האינטגרל הוא:

$$\int\limits_{-1}^1\int\limits_{x^3}^{\sqrt{2-x^2}} f\left(x,y\right)dydx$$

אם כן, התחום הוא:



נשים לב שאם נסובב את התחום, תהיה לנו בעיה להביע את x כפונקציה של y מכיוון שלחלק מה-x מתאים יותר מ-y אחד.

לכן, נחלק את התחום שלנו לשני תחומים - תחום בו $-1 \leq x \leq \sqrt[3]{y}$ ותחום בו $-\sqrt{2-y^2} \leq x \leq \sqrt{2-y^2}$. קיבלנו את הפונקציות האלו מהפונקציות $y = x^3, y = \sqrt{2-x^2}$.

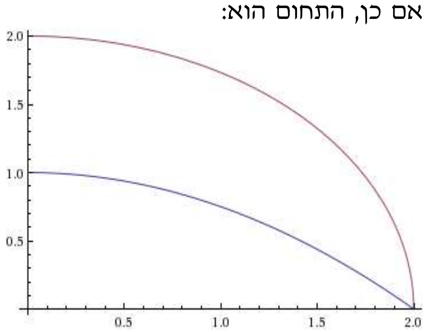
בתחום הראשון $-1 \leq y \leq 1$ ובתחום השני $1 \leq y \leq \sqrt{2}$ ולכן:

$$\int_{-1}^{1} \int_{x^3}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\, dydx = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\, dxdy + \int_{1}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\, dxdy$$

(ג) האינטגרל הוא:

$$\int_{0}^{2} \int_{\frac{4-x^2}{4}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\, dydx$$

אם כן, התחום הוא:



שוב, תהיה לנו בעיה ולכן נחלק לשני תחומים.

אם $y = \sqrt{4-x^2}$ אז $x = \pm\sqrt{4-y^2}$ בהתאם לתחום. בתחום שלנו הסימן חיובי.

אם $y = \frac{4-x^2}{4}$ אז $x = \sqrt{4-4y}$ בהתאם לתחום. התחומים שלנו יהיו:

$$0 \leq y \leq 1, \sqrt{4-4y} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}$$

$$1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}$$

לכן:

$$\int_{0}^{2}\int_{\frac{4-x^2}{4}}^{\sqrt{4-x^2}} f\left(x,y\right)dydx=\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{4-4y}}^{\sqrt{4-y^2}} f\left(x,y\right)dxdy+\int_{1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} f\left(x,y\right)dxdy$$

8. כאשר השינוי הוא לא אחד מהסטנדרטיים, ננסה להסביר למה הפונקציה אכן חח"ע.

(א) נעבור לקואורדינטות קוטביות, $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$. בתחום שלנו:

$$\left(r\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\left(r\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{1}{2}$$

אם כן:

$$r^2-r\left(\sin\theta+\cos\theta\right)\leq 0$$

כלומר: $0\leq r\leq\cos\theta+\sin\theta$.

בפרט, $-\sin\theta\leq\cos\theta$ ולכן $-\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{4}$.

היעקוביאן הוא r, ולכן:

$$\iint_D\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_{0}^{\cos\theta+\sin\theta}\frac{r}{\sqrt{r^2}}drd\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\cos\theta+\sin\theta\right)d\theta=2\sqrt{2}$$

(ב) נסמן $u=x+y, v=x-y$. לכן:

$$x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$$

לכן:

$$|J|=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

אנו צריכים ערך מוחלט, ולכן $\frac{1}{2}$.

איך משתנה התחום? נקבל $1\leq u\leq 2, |v|\leq u$.

לפיכך:

$$\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy = \int\limits_1^2\int\limits_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}}\cdot\frac{1}{2}dvdu = \int\limits_1^2 \left(\frac{u}{2}e^{\frac{v}{u}}\right)_{v=-u}^{v=u} du = \int\limits_1^2 \frac{u\left(e-\frac{1}{e}\right)}{2}du = \frac{3\left(e-\frac{1}{e}\right)}{4}$$

(ג) התחום הוא מעגל וגם הפונקציה נראית מתאימה ־ נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

במעגל היחידה, $0 \le x^2+y^2 = r^2 \le 1$ כלומר $0 \le r \le 1$.

כמו כן, $0 \le \theta \le 2\pi$ והיעקוביאן הוא r, לכן:

$$\iint\limits_D \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \sin r\cdot rdrd\theta = 2\pi\cdot\int\limits_0^1 r\sin rdr =$$

אינטגרציה בחלקים:

$$= 2\pi\cdot\left(-r\cos r|_{r=0}^{r=1} - \int\limits_0^1 -\cos rdr\right) = 2\pi\cdot(\sin 1-\cos 1)$$

(ד) נציב: $u = x+y, v = x-y$, ולכן:

$$x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$$

לכן היעקוביאן הוא:

$$|J| = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

אנו צריכים ערך מוחלט ולכן $\frac{1}{2}$.

איך משתנה התחום?

$$0 \le x+y \le 1 \Longrightarrow 0 \le u \le 1$$

$$y, x \ge 0 \Longrightarrow u+v, u-v = 0 \Longrightarrow |v| \le u$$

לפיכך:

$$\iint\limits_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dxdy=\int\limits_0^1\int\limits_{-u}^{u}\cos\left(\frac{v}{u}\right)\cdot\frac{1}{2}dvdu=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^1 u\sin\left(\frac{u}{v}\right)\Big|_{v=-u}^{v=u}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 2u\sin 1du$$

$$=\sin 1\cdot u^2\Big|_{u=0}^{u=1}=\sin 1$$

(ה) החלפת המשתנים:

$$u=x+y, v=\frac{y}{x^3}$$

נראית קלאסית. למה זו פונקציה חח"ע?

התחום שלנו יהיה $\frac{1}{2}\leq u\leq 1$, $1\leq v\leq 4$. ל־u,v כלשהם בתחום, x,y שיתאימו להם צריכים לקיים:

$$y=vx^3\Longrightarrow u=x+vx^3$$

כמה x פותרים את המשוואה הזו? אם נגזור את $u=x+vx^3$ נקבל:

$$u'=1+3vx^2>0$$

כלומר לפונקציה $u\left(x\right)$ אין נקודות קיצון (לא בקצוות; היא עולה ממש בכל התחום) ולכן היא חותכת את 0 רק במקום אחד, כלומר יש רק פתרון אחד למשוואה.

לכן לכל u יש רק x אחד מתאים. לכן, יש גם רק y אחד מתאים כי $u=x+y$.

נחשב את היעקוביאן:

$$\left|\frac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(x,y\right)}\right|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -\frac{3y}{x^4} & \frac{1}{x^3}\end{vmatrix}=\frac{x+3y}{x^4}$$

ולכן: $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1}=\frac{x^4}{x+3y}$, לכן:

$$\iint\limits_D \frac{x+3y}{x^4}e^{\frac{y}{x^3}}dxdy=\int\limits_1^4\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}e^v dudv=\frac{1}{2}\int\limits_1^4 e^v dv=\frac{e^4-e}{2}$$

(ו) נחליף את המשתנים:

$$u=x^2, v=\frac{y}{x}$$

מכיוון ש-$x,y\geq 0$ קל לראות שההתאמה חח"ע; אם נבחר u,v כלשהם נקבל $x=\sqrt{u}, y=vx$.

נחשב את היעקוביאן:

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=\begin{vmatrix} 2x & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}=2$$

ולכן: $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1}=\frac{1}{2}$.

איך משתנה התחום?

$$0\leq x\leq 2, u=x^2\Longrightarrow 0\leq u\leq 4$$

$$0\leq y\leq x\Longrightarrow 0\leq \frac{y}{x}=v\leq 1$$

לפיכך:

$$\iint\limits_D \frac{2x^2e^{x^2}}{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_D \frac{2e^{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}dxdy=\int\limits_0^1\int\limits_0^4\frac{2e^u}{1+v^2}\cdot\frac{1}{2}dudv=\int\limits_0^1 \left.\frac{e^u}{1+v^2}\right|_{u=0}^{u=4}dv$$

$$=\int\limits_0^1\frac{e^4-1}{1+v^2}dv=\left(e^4-1\right)\arctan v\big|_{v=0}^{v=1}=\frac{\pi\left(e^4-1\right)}{4}$$

(ז) נחליף את המשתנים:

$$u=\sqrt{x}, v=\sqrt{y}$$

קל לראות שההחלפה חח"ע.

נחשב את היעקוביאן:

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=\begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{vmatrix}=\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{y}}$$

לכן: $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = 4\sqrt{x}\sqrt{y} = 4uv$.

התחום שלנו הוא: $D = \{0 \le u+v \le 1\}$, ולכן:

$$\iint\limits_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}dxdy = \iint\limits_{\{0\le u+v\le 1\}} \sqrt{u+v}\cdot 4uvdudv = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-v} \sqrt{u+v}\cdot 4uvdudv$$

נציב $t = u+v$, לכן $dt = du$ ולכן:

$$= 4\int\limits_0^1 \int \sqrt{t}\,(t-v)\,vdtdv = 4\int\limits_0^1 \left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}vt^{\frac{3}{2}}\right)dv = 4\int\limits_0^1 \left(\frac{2}{5}(u+v)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}v\,(u+v)^{\frac{3}{2}}\right)_{u=0}^{u=1-v} dv$$

$$= 4\int\limits_0^1 \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5}v^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}v + \frac{2}{3}v^{\frac{5}{2}}\right)dv = 4\cdot\left(\frac{2}{5}v - \frac{4}{35}v^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{3}v^2 + \frac{4}{21}v^{\frac{7}{2}}\right)_{v=0}^{v=1} = \frac{4}{7}$$

9. שוב, נשתדל להסביר למה ההחלפה חח"ע.

(א) ה־$2z$ קצת הורס לקואורדינטות כדוריות, אז ננסה גליליות:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$$

לכן התחום שלנו הוא $r^2+z^2 \le 3, r^2 \le 2z$ כלומר: $r \le \sqrt{2z}, r \le \sqrt{3-z^2}$.

מתי התחומים האלו נחתכים? $\sqrt{2z} = \sqrt{3-z^2}$, כלומר:

$$2z = 3 - z^2 \Longrightarrow z = 1, z = -3$$

מכיוון ש: $x^2+y^2 \le 2z$ נקבל: $0 \le z$ ולכן $z=1$ הוא המתאים.

מצד שני, התנאי $x^2+y^2+z^2 \le 3$ נותן לנו $z \le \sqrt{3}$.

כלומר, בתחום $0 \le z \le 1$ התחום המתאים ל־r הוא $0 \le r \le \sqrt{2z}$.

בתחום $1 \le z \le \sqrt{3}$ התחום המתאים ל־r הוא $0 \le r \le \sqrt{3-z^2}$.

נתבונן על האינטגרל:

$$\iiint\limits_D (x+y+z)^2\,dxdydz = \iiint\limits_D \left(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz\right)dxdydz$$

הביטויים xy,xz אי־זוגיים ביחס ל־x והתחום סימטרי ביחס ל־x ולכן האינטגרל שלהם מתאפס.

באופן דומה, הביטוי yz אי־זוגי ביחס ל־y והתחום סימטרי ביחס ל־y ולכן האינטגרל שלו מתאפס. לכן:

$$\iiint\limits_D (x+y+z)^2\, dxdydz = \iiint\limits_D \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz$$

נפצל לשני אינטגרלים, בהתאם לתחומים של z בהם התחומים של r שונים.

היעקוביאן הוא r, ו־$0\le\theta\le 2\pi$ בנוהל. ולכן:

$$=\int_0^1\int_0^{\sqrt{2z}}\int_0^{2\pi}\left(r^2+z^2\right) rd\theta drdz+\int_1^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3-z^2}}\int_0^{2\pi}\left(r^2+z^2\right) rd\theta drdz$$

נחשב כל אחד בנפרד:

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{2z}}\int_0^{2\pi}\left(r^2+z^2\right) rd\theta drdz = 2\pi\cdot\int_0^1\int_0^{\sqrt{2z}}\left(r^2+z^2\right) rdrdz = 2\pi\cdot\int_0^1\left(\frac{r^4}{4}+\frac{r^2z^2}{2}\right)_{r=0}^{r=\sqrt{2z}} dz$$

$$=2\pi\cdot\int_0^1\left(z^2+z^3\right) dz = 2\pi\cdot\left(\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}\right)\Big|_{z=0}^{z=1}=\frac{7\pi}{12}$$

$$\int_1^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3-z^2}}\int_0^{2\pi}\left(r^2+z^2\right) rd\theta drdz = 2\pi\cdot\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{r^4}{4}+\frac{r^2z^2}{2}\right)_{r=0}^{r=\sqrt{3-z^2}} dz$$

$$=2\pi\cdot\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{\left(3-z^2\right)^2}{4}-\frac{\left(3-z^2\right)z^2}{2}\right) dz = 2\pi\cdot\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{9-z^4}{4}\right) dz=\frac{\pi}{2}\cdot\left(9z-\frac{z^5}{5}\right)\Big|_{z=1}^{z=\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left(9\sqrt{3}-\frac{9\sqrt{3}}{5}-9+\frac{1}{5}\right)=\frac{\pi\left(36\sqrt{3}-44\right)}{10}$$

ובסה"כ:

$$\iiint\limits_D (x+y+z)^2\, dxdydz = \pi\cdot\left(\frac{\left(36\sqrt{3}-44\right)}{10}+\frac{7}{12}\right)$$

(ב) אם נעבור לקואורדינטות גליליות נקבל:

$$r \le \sqrt{z^2}, r \le \sqrt{1-z^2}$$

לכן $-1 \le z \le 1$. נחפש את נקודת החיתוך:

$$\sqrt{z^2} = \sqrt{1-z^2} \Longrightarrow z = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

לפיכך, כאשר $|z| \le \sqrt{\frac{1}{2}}$, התחום של r הוא $0 \le r \le \sqrt{z^2}$.

כאשר $\sqrt{\frac{1}{2}} \le |z| \le 1$, התחום של r הוא $0 \le r \le \sqrt{1-z^2}$.

מכיוון שהתחום סימטרי ביחס ל$-z$ והפונקציה זוגית ביחס ל$-z$, נסתכל רק על התחום בו $z \ge 0$ ונכפיל לבסוף ב-2.

בתחום זה, $\sqrt{z^2} = z, 0 \le z \le \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}} \le z \le 1$. אם כן, נחלק את האינטגרל לשני אינטגרלים, עם תחומים שונים של z שנותנים תחומים שונים של r:

$$\iiint\limits_{D\cap\{z\ge 0\}} 1dxdydz = \int\limits_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\int\limits_0^{z}\int\limits_0^{2\pi} rd\theta drdz + \int\limits_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1}\int\limits_0^{\sqrt{1-z^2}}\int\limits_0^{2\pi} rd\theta drdz$$

ה$-r$ שצץ לו שם הוא כמובן היעקוביאן. $0 \le \theta \le 2\pi$ בנוהל.

נחשב כל אחד מהאינטגרלים בנפרד:

$$\int\limits_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\int\limits_0^{z}\int\limits_0^{2\pi} rd\theta drdz = 2\pi\cdot\int\limits_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\int\limits_0^{z} rdrdz = 2\pi\cdot\int\limits_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=z} dz = 2\pi\cdot\int\limits_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\frac{z^2}{2}dz$$

$$= \pi\cdot\frac{z^3}{3}\Bigg|_{z=0}^{z=\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi\sqrt{8}}{6}$$

$$\int\limits_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1}\int\limits_0^{\sqrt{1-z^2}}\int\limits_0^{2\pi} rd\theta drdz = 2\pi\cdot\int\limits_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1}\int\limits_0^{\sqrt{1-z^2}} rdrdz = 2\pi\cdot\int\limits_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1}\left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=\sqrt{1-z^2}} dz$$

$$= \pi\cdot\int\limits_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1}\left(1-z^2\right)dz = \pi\cdot\left(z-\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{z=\sqrt{\frac{1}{2}}}^{z=1} = 2\pi\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{12\sqrt{2}}\right)$$

ובסה"כ:

$$\iiint\limits_{D\cap\{z\geq 0\}} 1dxdydz = \frac{\pi\sqrt{8}}{6} + 2\pi\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{5}{12\sqrt{2}}\right)$$

וכדי לקבל את האינטגרל המקורי, נכפיל ב-2:

$$\iiint\limits_{D} 1dxdydz = 4\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{8}}{12} + \frac{1}{3} - \frac{5}{12\sqrt{2}}\right)$$

(ג) נעבור לקואורדינטות כדוריות:

$$x = r\cos\phi\sin\theta, y = r\sin\phi\sin\theta, z = r\cos\theta$$

איך נראה התחום כעת?

$$z \geq 0 \Longrightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x \geq 0, y \geq 0, y \geq x \Longrightarrow r\sin\phi\sin\theta \geq r\cos\phi\sin\theta \Longrightarrow \sin\phi \geq \cos\phi$$

ומכיוון שאנו בתומן הראשון, $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. כמו כן, $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ ולכן $0 \leq r \leq R$.

היעקוביאן הוא $r^2\sin\theta$ ולכן:

$$\iiint\limits_{D} (yz+zx)\,dxdydz = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{R}\left(r^2\cos\theta\sin\theta\cdot(\cos\phi+\sin\phi)\right)r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta\cdot(\cos\phi+\sin\phi)\cdot\left.\left(\frac{r^5}{5}\right)\right|_{r=0}^{r=R}d\theta d\phi$$

$$= \frac{R^5}{5}\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta\,(\cos\phi+\sin\phi)\,d\theta d\phi$$

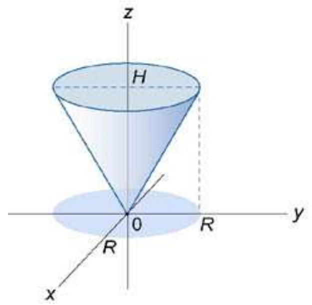
נציב $t = \sin\theta$ ואז $dt = \cos\theta d\theta$ ולכן:

$$= \frac{R^5}{5}\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int t^2(\cos\phi+\sin\phi)\,dtd\phi = \frac{R^5}{5}\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\phi+\sin\phi)\left.\left(\frac{\sin^3\theta}{3}\right)\right|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}d\phi$$

$$= \frac{R^5}{15} \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\phi + \sin\phi)\, d\phi = \frac{R^5}{15} \cdot (\sin\phi - \cos\phi)\big|_{\phi=\frac{\pi}{4}}^{\phi=\frac{\pi}{2}} = \frac{R^5}{15}$$

10. נחשב את הנפחים בעזרת אינטגרל משולש.

(א) נשים את קודקודו של החרוט בראשית הצירים, כך:



אם כן, החרוט חסום בין המשטחים $z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}$, $z = H$.

אם נעבור לקואורדינטות גליליות, נקבל:

$$0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le R \Longrightarrow \frac{Hr}{R} \le z \le H$$

היעקוביאן הוא r ולכן:

$$V = \iiint_D 1dxdydz = \int_0^R \int_r^H \int_0^{2\pi} rd\theta dzdr = 2\pi\cdot \int_0^R (z)\big|_{z=\frac{Hr}{R}}^{z=H} rdr = 2\pi\cdot \int_0^R \left(Hr - \frac{Hr^2}{R}\right) dr$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{Hr^2}{2} - \frac{Hr^3}{3R}\right)\Bigg|_{r=0}^{R} = 2\pi \cdot \left(\frac{HR^2}{2} - \frac{Hr^2}{3}\right) = \frac{\pi HR^2}{3}$$

(ב) נסתכל רק על הגזרה בתומן הראשון, ונכפיל ב-8.

נעבור לקואורדינטות כדוריות; בתומן הראשון, $0 \le \theta, \phi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le r \le R$,

היעקוביאן הוא $r^2 \sin\theta$ ולכן:

$$V = 8\cdot \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr = 8\cdot \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \left(-\cos\theta\right)\big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\phi dr = 8\cdot \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\phi dr$$

$$= \frac{8\pi}{2} \cdot \int_0^R r^2 dr = 4\pi \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{r=3} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

(ג) נעוות מעט את הקואורדינטות הכדוריות כך שיתאימו לצרכינו:

$$x = ar\sin\theta\cos\phi, y = br\sin\theta\sin\phi, z = cr\cos\theta$$

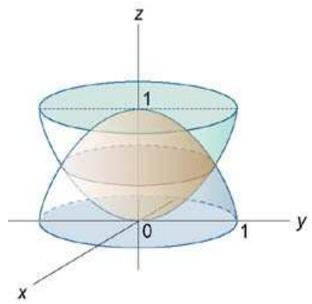
במקרה זה, היעקוביאן הוא: $abcr^2\sin\theta$.

נחשב רק את הגזרה שנחה בתומן הראשון, ונכפיל ב-8.

אם כן, בתומן הראשון, $0 \le \theta, \phi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 1$ ולכן:

$$V = 8\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 abcr^2\sin\theta drd\theta d\phi = 4\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 abcr^2\sin\theta drd\theta = 4\pi\int_0^1 abcr^2 dr = \frac{4\pi abc}{3}$$

(ד) הגוף שלנו הוא:

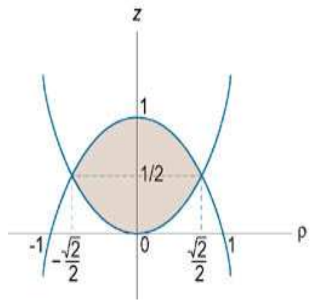


נחפש את רדיוס מעגל החיתוך בין שני הפרבולואידים:

$$z = r^2 = 1 - r^2 \Longrightarrow r = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

כאשר $r^2 = x^2 + y^2$; הגוף נמצא מעל מישור xy ולכן $r = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ולכן $z = \frac{1}{2}$.

נעבור לקואורדינטות גליליות. נקבל: $r^2 \le z \le 1 - r^2$, וכשנטיל על מישור xy נקבל:

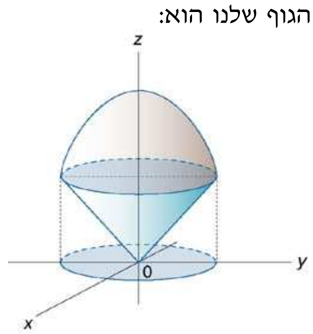


כלומר $0 \le r \le \sqrt{\frac{1}{2}}$. $0 \le \theta \le 2\pi$ והיעקוביאן הוא r ולכן:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\int_{r^2}^{1-r^2} rdzdrd\theta = 2\pi\cdot\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} r\ (z)|_{r^2}^{1-r^2}\ dr = 2\pi\cdot\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\left(r-2r^3\right)dr$$

$$= 2\pi\cdot\left(\frac{r^2-r^3}{4}\right)\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{4}$$

(ה) הגוף שלנו הוא:

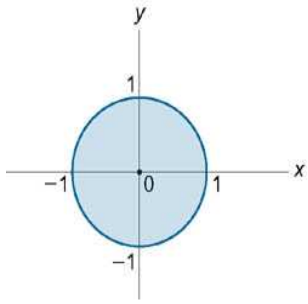


נחפש את רדיוס מעגל החיתוך בין הפרבולואיד והחרוט:

$$r = 2 - r^2 \Longrightarrow r = -2, 1$$

כאשר $r = \sqrt{x^2+y^2}$, ובתחום שלנו בוודאי $r = 1$.

ההטלה על מישור xy נותנת:



אם נעבור לקואורדינטות גליליות, נקבל: $r \leq z \leq 2-r^2$ ובנוסף:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$$

היעקוביאן הוא r ולכן:

$$V=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_r^{2-r^2} r dz d\theta dr = 2\pi\cdot\int_0^1 r\ (z)|_{z=r}^{z=2-r^2}\ dr = 2\pi\cdot\int_0^1 \left(2r-r^3-r^2\right) dr$$

$$= 2\pi\cdot\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}-\frac{r^3}{3}\right)\Big|_{r=0}^{r=1} = \frac{5\pi}{6}$$