

תרגיל 4 - פונקציות מורכבות

1. עבור הפונקציה $u(x, y)$ הבאות, מצאו $v(x, y)$ כך שהפונקציה

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

תהיה אנליטית. נסו לבטא את f לפי z .

א. $u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$

ב. $u(x, y) = \frac{x}{x+y} + x$

2. חשבו $\int_{\gamma} z \sin x \, dz$ כאשר $x = \operatorname{Re} z$ ו- γ מסילה המורכבת משלושה קטעים ישרים :
מ- i ל- 0 , מ- 0 ל- 1 ומ- 1 ל- $1+i$.

3. חשבו $\int_{\gamma} [\sin z + \bar{z}] \, dz$ כאשר γ היא המסילה המוגדרת ע"י

$$z(t) = \begin{cases} e^{it} & -\pi \leq t \leq 0 \\ 1-2t & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

4. חשבו $\int_{\gamma} \frac{\bar{z}^3 - 8}{\bar{z} - 2} \, dz$ כאשר γ היא המסילה שמורכבת מהקטע הישר מ- i עד 0 , ואח"כ הקטע הישר מ- 0 ל- 1 .

5. השתמשו במשפט הערכה כדי להוכיח את אי השוויונות הבאים :

א. $\left| \int_{\gamma} (e^z - e^{\bar{z}}) \, dz \right| \leq 2(\pi + 2)$ כאשר γ היא המסילה המורכבת משלושת הישרים : מ- 1 ל- $1 + \frac{1}{2}\pi i$, מ- $1 + \frac{1}{2}\pi i$ ל- $1 + \frac{1}{2}\pi i - 1$ ומ- $1 + \frac{1}{2}\pi i - 1$ ל- -1 .

ב. $\left| \int_{\gamma} \frac{2-z}{2+z} \, dz \right| \leq 3\pi + 6$ כאשר γ היא המסילה המורכבת מחצי מעגל היחידה העליון ומהקטע הישר מהנקודה -1 לנקודה 1 .