בס"ד

פתרון מבחן מועד א' בקורס 88133

חשבון אינפיניטסימלי 2

<u>שאלה 1</u>. חשב את הביטוי $\int_0^1 e^{-t^2}dt$ בקירוב של מאית. הצדק את צעדיך.

פתרון: בטור מקלורן של e^x: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ נציב $x=-t^2$ ונקבל את הטור: $e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}$.

רדיוס ההתכנסות של טור החזקות הזה הוא ∞ ולפיכך הטור מתכנס במידה שווה בכל קטע סופי ב- $\mathbb{R}$.

אם כן בפרט באינטרוול הנתון, האינטגרל של הטור שווה לטור האינטגרלים:

$$\int_0^1 e^{-t^2}dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{2k}dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \left. \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \right|_0^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}$$

קיבלנו טור לייבניץ. שאריתו מקיימת: $|r_n| < a_{n+1}$. לפיכך נדרוש: $\frac{1}{(n+1)!(2n+3)} < \frac{1}{100}$

וזה נכון החל מ- $n=3$, כלומר נזדקק לפיתוח מסדר 3: $\int_0^1 e^{-t^2}dt \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!\cdot 5} - \frac{1}{3!\cdot 7}$.

<u>שאלה 2</u>. קבע היכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\arctan x)^n}{1+x^2}$ מתכנס במידה שווה. נמק!

פתרון: אם נציב $t=\arctan x$ נקבל טור חזקות $\frac{1}{1+x^2}\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$ המתכנס נקודתית ב- $(-1,1)$ ובמ"ש בכל קטע סגור בתוכו. במושגים של x נקבל כי הטור מתכנס במ"ש בכל קטע סגור המוכל ב- $(-\tan 1, \tan 1)$.

<u>שאלה 3</u>. חשב את הגבול: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x \cos\frac{1}{t}dt$. הצדק את צעדיך (רמז: אין צורך לחשב את האינטגרל).

פתרון: האינטגרל הלא אמיתי מסוג ראשון: $\int_1^{\infty} \cos\frac{1}{t}dt$ שווה לאינסוף. ניתן לראות זאת למשל ע"י השוואה

לאינטגרל $\int_1^{\infty} 1\cdot dt$ שמתבדר. כלומר גבול הפונקציה $F(x) = \int_1^x \cos\frac{1}{t}dt$ (שהיא הקדומה של $\cos\frac{1}{x}$)

כאשר $x\to\infty$ הוא אינסוף. אם כן הביטוי המבוקש הוא גבול של מנה של שתי פונקציות, השואפות כל אחת לאינסוף.

ניעזר במשפט לופיטל: $\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x \cos\frac{1}{t}dt}{x} \underbrace{=}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \xrightarrow{L'Hopital} \lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}}{1}=1$

הגזירה של המונה מתבססת על המשפט היסודי של החדו"א.

__שאלה 4.__

א. הראה כי הפרש של שתי סדרות פונקציות המתכנסות במ"ש בקטע מתכנס אף הוא במ"ש שם.

ב. הראה כי אם טור פונקציות $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ מתכנס במ"ש בקטע I, אז גם סדרת הפונקציות $\{f_k(x)\}$ מתכנסת במ"ש לאפס ב- I (אפשר להיעזר בתוצאה של סעיף א').

פתרון:

א. תהיינה שתי סדרות המתכנסות במ"ש בקטע I: $a_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}a(x), b_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}b(x)$

כלומר לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ (הגדול מבין השניים שמתקבלים בסדרות) כך ש:

$$\forall n>n_0, x\in I:\ \left|a_n(x)-a(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ \left|b_n(x)-b(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

לפיכך:

$$\forall n>n_0, x\in I:\ \left|a_n(x)-b_n(x)-\left(a(x)-b(x)\right)\right|=\left|a_n(x)-a(x)-\left(b_n(x)-b(x)\right)\right|$$

$$\le\left|a_n(x)-a(x)\right|+\left|b_n(x)-b(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

כלומר הפרש הסדרות $a_n(x)-b_n(x)$ מתכנס במ"ש ב- I לפונקצית הגבול: $a(x)-b(x)$.

ב. טור פונקציות מתכנס במ"ש בקטע אם הסס"ח שלו $S_n(x)$ מתכנסת במ"ש שם לסכום: $S(x)$.

נרשום: $f_n(x)=S_n(x)-S_{n-1}(x)\xrightarrow{n\to\infty}S(x)-S(x)=0$ ונקבל על סמך סעיף א' שההתכנסות היא במ"ש לאפס בקטע.

__שאלה 5.__ הראה כי: $\frac{1}{2e}\ln 2\le\int_0^{\pi/4}e^{-x^2}\tan x\,dx\le\frac{1}{2}\ln 2$. נמק!

פתרון: עפ"י משפט ערך הממוצע האינטגרלי קיימת נקודה $0<c<\frac{\pi}{4}$ בה מתקיים:

$$\int_0^{\pi/4}e^{-x^2}\tan x\,dx=e^{-c^2}\int_0^{\pi/4}\tan x\,dx$$

לגבי האינטגרל שנותר: $\int_0^{\pi/4} \tan x\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx$ נציב: $t = \cos x$ ונקבל: $dt = -\sin x dx$, $t: 1 \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}$

ולפיכך: $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{t} = \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{dt}{t} = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$.

כמו כן נרשום: $0 < c < \frac{\pi}{4} < 1 \Leftarrow 0 < c^2 < 1 \Leftarrow 1 < e^{c^2} < e \Leftarrow \frac{1}{e} < e^{-c^2} < 1$.

כעת אם נכפיל את שתי התוצאות שקיבלנו נקבל את התוצאה המבוקשת.

<u>שאלה 6</u>. יהא C מספר קבוע ותהא $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ כך שבכל נקודה רציונלית בקטע מתקיים $f(x) = C$. הראה כי בהכרח: $\int_a^b f(x)dx = C(b-a)$.

פתרון: בכל חלוקה של $[a,b]$, בכל תת-קטע של החלוקה, נמצא בהכרח מספר רציונלי. ולכן לכל $\delta > 0$ קיימת חלוקה T עם $\lambda(T) < \delta$ ובחירת נקודות רציונליות בה כך שסכום רימן המתקבל הוא: $\sum_{i=1}^n C \cdot \Delta x_i = C(b-a)$. נתון שהפונקציה היא אינטגרבילית בקטע, כלומר שגבול כל סכומי הרימן הוא מספר אחד. מכאן שהוא חייב להיות עפ"י בחירת הנקודות הרציונליות ל: $C(b-a)$.