17.08.23

84-172 מתמטיקה ב' לכימאים – דר' ארז שיינר – פתרון מועד ב' – תשפ"ג

משך המבחן: שלוש שעות הוראות: יש לפתור את כל השאלות, משקל כל שאלה 28 נק', כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

שאלה 1 נביט במערכת המשוואות הבאה עם הנעלמים x, y, z והפרמטר a, בשדה המספרים הממשיים.

$$\begin{cases} x+z=1 \\ ax+(a^2-a)y+2az=2a-1 \\ (1-a)x+(2-a)z=0 \end{cases}$$

א. מצאו לכל ערכי הפרמטר a אם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות כלל.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ a & a^2-a & 2a & 2a-1 \\ 1-a & 0 & 2-a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{התחכמות קלה}]{R_3+R_2}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ a & a^2-a & 2a & 2a-1 \\ 1 & a^2-a & 2+a & 2a-1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-aR_1}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-a & a & a-1 \\ 0 & a^2-a & 1+a & 2a-2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-a & a & a-1 \\ 0 & 0 & 1 & a-1 \end{array}\right)$$

אם $a^2-a\neq 0$ כלומר $a\neq 0,1$ אזי המטריצה מדורגת, אין שורת סתירה, כל המשתנים תלויים ולכן פתרון יחיד.

נציב את הערכים הנותרים:

נציב $a=0$ ונקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

יש שורת סתירה ולכן אין פתרון.

נציב $a=1$ ונקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

נמשיך לדרג

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

זו צורה מדורגת, ללא שורת סתירה, עם משתנה חופשי, ולכן ישנם אינסוף פתרונות.

סה"כ:

$a = 1$ אינסוף פתרונות

$a = 0$ אין פתרונות

$a \neq 0,1$ פתרון יחיד

ב. מצאו את כל הפתרונות למערכת עבור $a = 1$.

נמשיך את הדירוג מסעיף קודם כאשר $a = 1$ לדירוג קנוני על מנת למצוא את הפתרונות.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

נציב פרמטר במשתנה החופשי $y = t$

$$x = 1$$

$$z = 0$$

סה"כ הפתרון הכללי הוא

$$(1, t, 0) = (1,0,0) + t(0,1,0)$$

ג. מצאו את כל הפתרונות למערכת עבור $a = -1$.

נציב $a = -1$ ונמשיך לדירוג קנוני

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2+\frac{1}{2}R_3]{R_1-R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

סה"כ הפתרון היחיד במקרה זה הוא

$$x = 3$$

$$y = -2$$

$$z = -2$$

כלומר

$$(3, -2, -2)$$

<u>שאלה 2</u> תהי העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המקיימת $T(1,0)=T(2,0)$.

א. חשבו את $T(1,0)$.

שלוש דרכים לענות על השאלה

דרך ראשונה

$$T(1,0)=T\big((2,0)-(1,0)\big)=T(2,0)-T(1,0)=(0,0)$$

דרך שנייה

$$T(2,0)=T\big(2(1,0)\big)=2T(1,0)$$

יחד עם הנתון

$$T(1,0)=2T(1,0)$$

נעביר אגף

$$(0,0)=2T(1,0)-T(1,0)=T(1,0)$$

דרך שלישית

נסמן $T(1,0)=(a,b)$ לכן

$$T(2,0)=T\big(2(1,0)\big)=2T(1,0)=(2a,2b)$$

ולכן

$$(a,b)=(2a,2b)$$

ולכן

$$a=2a,b=2b$$

ולכן $a=b=0$

ב. הראו כי $[T]$ <u>אינה</u> הפיכה.

נסמן את $T(0,1)=(c,d)$

ראינו בסעיף א' כי $T(1,0)=(0,0)$

ולכן המטריצה המייצגת היא

$$[T]=\begin{pmatrix}0 & c\\ 0 & d\end{pmatrix}$$

ולכן

$$\det([T])=0$$

ולכן המטריצה אינה הפיכה.

נתון בנוסף כי $T(1,1)=(1,0)$

ג. חשבו את $T(2,-3)$.

נמצא את המטריצה המייצגת $[T]$ ואז

$$T(2,-3) = [T]\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

אנחנו מצאנו את $T(1,0)$ וצריכים לחשב את $T(0,1)$

נשים לב כי

$$T(1,1) = T\big((1,0) + (0,1)\big) = T(1,0) + T(0,1) \overset{\text{סעיף א}}{=} T(0,1)$$

נתון

$$T(1,1) = (1,0)$$

ולכן

$$T(0,1) = (1,0)$$

ולכן

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$T(2,-3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = (-3,0)$$

ד. חשבו את $T(T(x,y))$.

שתי דרכים:

דרך ראשונה

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = (y,0)$$

$$T\big(T(x,y)\big) = T(y,0) = (0,0)$$

דרך שנייה

$$T\big(T(x,y)\big) = [T][T]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ([T])^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$[T]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$T\big(T(x,y)\big) = (0,0)$$

<u>שאלה 3</u> נביט בפונקציה $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^3$

א. מצאו את משוואת המישור המשיק לפונקציה $f(x,y)$ בנקודה $(1,1)$.

נזכור כי משוואת המישור המשיק היא

$$z - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

$$f(1,1) = 4$$

$$f_x(x,y) = 2x + 2y$$

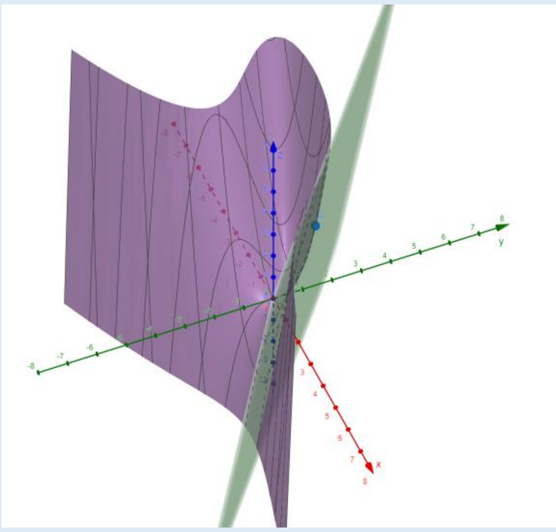
$$f_x(1,1) = 4$$

$$f_y(x,y) = 2x + 3y^2$$

$$f_y(1,1) = 5$$

סה"כ משוואת המישור המשיק היא

$$z - 4 = 4(x - 1) + 5(y - 1)$$



ב. מצאו את כיוון העלייה הגדולה ביותר בנקודה $(1,1)$ (הכיוון בו הנגזרת הכיוונית מקסימלית).

ג. מצאו ומיינו את הנקודות הקריטיות של $f(x,y)$ (מינימום מקומי, מקסימום מקומי, או אוכף).

<u>שאלה 4</u> בכל אחד מן הסעיפים חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_D f(x,y)dxdy$

א. כאשר $f(x,y) = \frac{x}{y}$ והתחום הוא $D = \{(x,y) | 0 \le x \le 4, 1 \le y \le e^2\}$.

נשים לב שהצורה של D היא מלבן.

$$\iint_D f = \int_0^4 \left(\int_1^{e^2} \frac{x}{y} dy \right) dx$$

נפתור את האינטגרל הפנימי

$$\int_1^{e^2} \frac{x}{y} dy = x\int_1^{e^2} \frac{1}{y} dy = x[\ln|y|]_1^{e^2} = x(2-0) = 2x$$

לכן

$$\iint_D f = \int_0^4 2x dx = [x^2]_0^4 = 16$$

ב. כאשר $f(x,y) = xy$ והתחום הוא $D = \{(x,y) | x^2+y^2 \le 1, y \ge 0\}$.

כרגיל נתחיל כמו מתמטיקאים טובים להביט ברצפה, הצורה של D היא החצי העליון של מעגל היחידה.

כעת נשנה קואורדינטות

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left(\int_0^\pi r\cos(\theta) \cdot r\sin(\theta) \cdot r d\theta \right) dr = \int_0^1 \left(r^3 \cdot \int_0^\pi \cos(\theta)\sin(\theta)\, d\theta \right) dr$$

נחשב את האינטגרל הפנימי

$$\int_0^\pi \cos(\theta)\sin(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi 2\cos(\theta)\sin(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 0$$

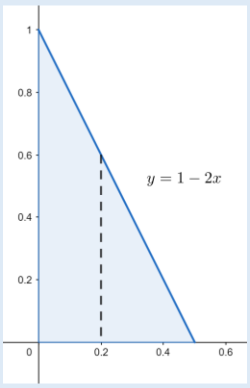
לא צריך לטרוח עם האינטגרל החיצוני, סה"כ

$$\iint_D f = 0$$

ג. כאשר $f(x,y) = \frac{4y}{1-y}\cos(y^2)$ והתחום הוא $D = \left\{(x,y) | 0 \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le 1-2x\right\}$.

רמז: החליפו סדר אינטגרציה.

התחום הנתון הוא

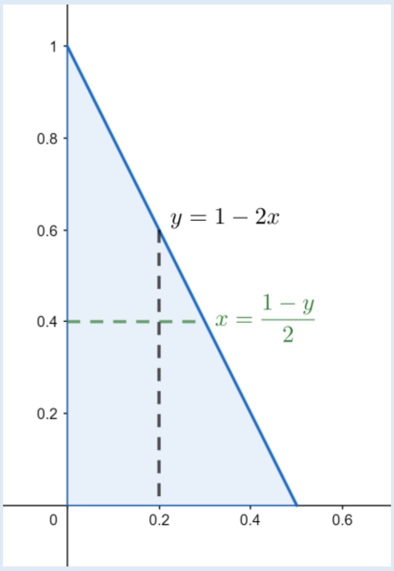


$$y = 1 - 2x$$

$$2x = 1 - y$$

$$x = \frac{1-y}{2}$$

התחום לאחר שינוי סדר האינטגרציה הוא



$$D = \left\{(x,y) | 0 \le y \le 1, 0 \le x \le \frac{1-y}{2}\right\}$$

ולכן

$$\iint_D f = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1-y}{2}} \frac{4y}{1-y} \cos(y^2)\, dx \right) dy$$

נחשב את האינטגרל הפנימי

$$\int_0^{\frac{1-y}{2}} \frac{4y}{1-y} \cos(y^2)\, dx = \frac{4y}{1-y} \cos(y^2) \int_0^{\frac{1-y}{2}} dx = \frac{4y}{1-y} \cos(y^2) \cdot \frac{1-y}{2} = 2y \cos(y^2)$$

לכן

$$\iint_D f = \int_0^1 2y \cos(y^2)\, dy = \left\{ \begin{matrix} t = y^2 \\ dt = 2ydy \end{matrix} \right\} = \int_{0^2}^{1^2} \cos(t)\, dt = [\sin(t)]_0^1 = \sin(1)$$