# תמונה ותמונה הפוכה

הגדרה: תהי $f: X \to Y$ פונק'

1. $A \subseteq X$ , $B \subseteq Y$

אז

1. התמונה של $A$ תחת $f$ היא $f[A] = \{ f(x) \in Y \mid x \in A \}$ ← ה-$y$ שמתקבלים מ-$A$.

2. $f^{-1}[B] = \{ x \in X \mid f(x) \in B \}$ ← המקורות שהתמונה שלהם ב-$B$

דוגמאות: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x) = x^2$

אז

$$f\left[\left(\tfrac{1}{2}, 2\right)\right] = \left\{ f(x) \mid x \in \left(\tfrac{1}{2}, 2\right) \right\} = \left(\tfrac{1}{4}, 4\right)$$

$f(1) = 1$

$f\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{9}{4} = 2.25$

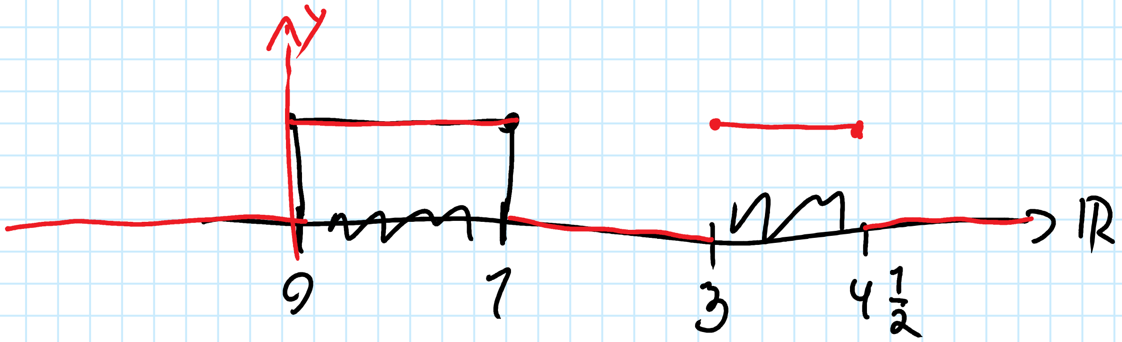
$$f^{-1}[\{1, 4, 9, 10\}] = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{1, 4, 9, 10\} \} =$$

$$\{ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm\sqrt{10} \}$$

2. $$D(x) = I_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$D^{-1}\left[\left[\tfrac{1}{2}, 8\right]\right] = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \tfrac{1}{2} \le f(x) \le 8 \right\} = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1 \} = \mathbb{Q}$$

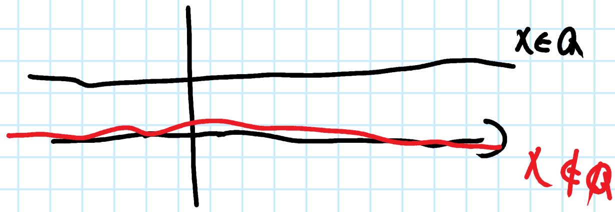
$$D[\{0, 8, -1\}] = \{ f(x) \mid x \in \{0, 8, -1\} \} = \{1\}$$




$A=\{[0,1]\cup[3,4\tfrac{1}{2}]$

$$I_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

$D(x)=I_{\mathbb{Q}}$




---

תרגיל: הוכח/הפרך: אזי (תהי: $f:X\to Y$) לכל $A_1,A_2\subseteq X$

$f[A_1\cap A_2]=f[A_1]\cap f[A_2]$

פתרון: לא נכון, תהי: $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$

$f(1)=1$ -ו

$f(2)=1$

$f(3)=1$

$f[\{1\}\cap\{2\}]=f[\emptyset]=\emptyset$ אך

$\neq$ ו-

$f[\{1\}]\cap f[\{2\}]=\{1\}\cap\{1\}=\{1\}$ בעוד ש-

**תרגיל:** הוכח / הפרך: האם מתקיים

$$f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$$

**פתרון:** **נכון**,

$$A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$$

$$\Downarrow$$

$$f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \qquad \mathrm{I}$$

$A \subseteq B$

$f[A] \subseteq f[B]$

$$\downarrow$$

$y \in f[A_1 \cap A_2]$

$\Downarrow$

$\exists x \in A_1 \cap A_2 ;\ f(x) = y$

$\exists x \in A_1 ;\ f(x) = y$

$y \in f[A_1]$

וכן,

$$A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$$

$$\Downarrow$$

$$f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_2] \qquad \mathrm{II}$$

מ- $\mathrm{I}$ ו- $\mathrm{II}$ נקבל

$$f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$$

---

**תרגיל:** מצאו $f: X \to Y$ ו שקיימת $A \subseteq X$

כך ש- $f^{-1}[f[A]] \neq A$

**פתרון:** נכון בהרצאה

---

**תרגיל:** מצאו $f: X \to Y$ ו שקיימת $B \subseteq Y$

כך ש- $f[f^{-1}[B]] \neq B$

תרגיל: מצאו $f: X \to Y$ וגם $B \subseteq Y$ כך ש: $f[f^{-1}[B]] \neq B$

פתרון: $f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ ו-

$f(1)=1$
$f(2)=1$
$f(3)=1$

אז נקח $B=\{1,2\}$

$$f[f^{-1}[B]] = f[\{1,2,3\}] = \{1\}$$

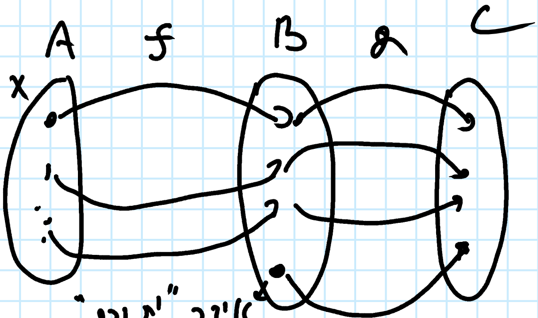
---

הרכבת פונק'

הגדרה: $f: A \to B$ ו- $g: B \to C$

אז $h = g \circ f : A \to C$

כך ש: $\forall x \in A;\ h(x) = g(f(x))$




איבר "יתום" לא מתקבל ע"י $f$

דוגמאות: $f_2, f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך ש- $f_1(x) = x^2$

$f_2(x) = \sin x$

אז $f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = f_1(\sin x) = (\sin x)^2$ $\neq$

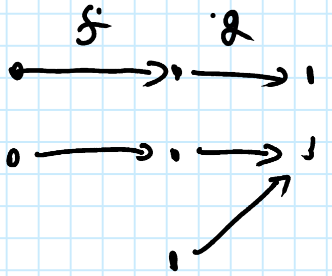
$f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x)) = f_2(x^2) = \sin(x^2)$

## תרגיל: הוכח/הפרך:

1. אם $g \circ f$ חח״ע אז (i) $g$ חח״ע. X
(ii) $f$ חח״ע ✓

2. אם $g \circ f$ על אז (i) $g$ על ✓
(ii) $f$ על X

$g(f(x)) = g \circ f$




$\rightarrow$ $g \circ f$ חח״ע + על

אך $g$ לא חח״ע
$f$ לא על

---

טענה: $g \circ f$ על אז $g$ על

הוכחה: $g \circ f$ על לכן לכל $y \in C$
קיים $x \in A$ כך ש-

$$g(f(x)) = y$$

נסמן $x' = f(x)$ אז לכל $y \in C$ קיים $x' = f(x)$

כך ש- $g(x') = y$

כלומר $g$ על.

תרגול:  תהי $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ פונק'

נגדיר $F:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

כך ש-

$$A^B=\{f:B\to A\}$$

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}=\{f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\}$$

$$F(f)=g\circ f$$

הקלט גם פונק' — הפלט הוא פונק'

הוכיחו ש- $F$ חח"ע $\iff$ $g$ חח"ע

הוכחה: $(\Rightarrow)$ תהי $g$ חח"ע נרצה להוכיח ש- $F(f)=g\circ f$ חח"ע

יהיו $f_1\neq f_2\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ נוכיח ש- $F(f_1)\neq F(f_2)$

$$\Downarrow$$

$$\exists n\in\mathbb{N}\ ;\ f_1(n)\neq f_2(n)$$

$g$ חח"ע $\Downarrow$

$$\underbrace{F(f_1)(n)}_{\text{הגדרת } F}=g(f_1(n))\neq g(f_2(n))=F(f_2)(n)$$

$$\Downarrow$$

$$F(f_1)\neq F(f_2)$$

חח"ע:
$f(a)=f(b)$
$\Downarrow$
$a=b$
או
$a\neq b$
$\Downarrow$
$f(a)\neq f(b)$

---

$(\Leftarrow)$ נתון $g(n)=g(m)$ נרצה ש- $n=m$

נגדיר שתי פונק':

$f_1(k)=n \quad \forall k\in\mathbb{N}$

$f_2(k)=m \quad \forall k\in\mathbb{N}$

אז

$$g(n)=g(f_1(k))$$
$$\|$$
$$g(m)=g(f_2(k))$$

$\forall k\in\mathbb{N}$

כלומר

$$\forall k\in\mathbb{N};\quad g(f_1(k))=g(f_2(k))$$

$$\Downarrow$$

$$F(f_1)=F(f_2)$$

חח"ע $F$ $\Downarrow$

$$f_1=f_2$$

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad n=f_1(k)=f_2(k)=m$$

$$n=m$$

---

פונק' הפיכות

תזכורת: $I_A: A\to A$ היא פונק' הזהות

$I_A(x)=x$

הגדרה: נאמר ש- $f: A\to B$ הפיכה אם קיימת $g: B\to A$ כך ש

$f\circ g=I_B$

$g\circ f=I_A$

משפט: $f$ הפיכה $\Leftrightarrow$ $f$ חח"ע ועל

ובמקרה זה $g$ היא <u>יחידה</u> ונסמן אותה ב- $f^{-1}$

תרגיל: יהיו $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_k : A \to A$ פונק' על/חח"ע/הפיכות

הוכיחו ש- $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ \ldots \circ f_k : A \to A$ היא על/חח"ע/הפיכה

פתרון: 7 ראינו בהרצאה שאם $f,g$ חח"ע/על

אז $f \circ g$ היא חח"ע/על

נוכיח ש- $f_1 \circ \ldots \circ f_n$ היא חח"ע

באינדוקציה על $n$

$n=2$ - הרצאה

נניח שזה נכון עבור $n$ כלומר $f_1 \circ \ldots \circ f_n$ היא חח"ע

נוכיח עבור $n+1$ $\underbrace{f_1 \circ \ldots \circ f_n}_{=g} \circ f_{n+1}$

אז $g \circ f_{n+1}$ היא הרכבה של שתי פונק' חח"ע

לכן היא חח"ע.

כנ"ל עבור על [נסו בבית]

הערה: כאמור אם $f,g$ הפיכות אז $f \circ g$ הפיכה

הפוך לא נכון, כלומר יתכן ש- $f \circ g$ הפיכה

אך $f,g$ לא הפיכות.

---

איך מוצאים הופכית לפונק' ממשית

דוגמה: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f(x)=x+1$

$$f(x) = x+1$$

הרעיון הוא לבודד את $x$ כלומר

$$x = f(x) - 1$$

$$\Downarrow$$

$$f^{-1}(x) = x - 1$$

ואכן

$$f(f^{-1}(x)) = f(x-1) = (x-1)+1 = x$$

2. מה לגבי

$$f(x) = 4x^3 + 2$$

$$4x^3 = f(x) - 2$$

$$x^3 = \frac{f(x)-2}{4}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{f(x)-2}{4}}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-2}{4}}$$

ואכן

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt[3]{\frac{x-2}{4}}\right) = 4\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{x-2}{4}}\right)^3 + 2 = x$$

(3) מה לגבי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=x^2+1$

לא הפיכה!! (לא חח"ע ולא על)

4. מה לגבי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=\sin x$

מצמצמים את $\mathbb{R}$

$$f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$$

ועכשיו היא חח"ע ועל לכן הפיכה $f^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

ומסמנים אותה כ- $=\arcsin$