תרגיל 4

הוכיחו את הטענות הבאות: לכל שתי קבוצות A, B מתקיים:

1. $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$.

הוכחה:

$$x \in \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\Updownarrow$$

$$x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B}$$

$$\Updownarrow$$

$$x \notin A \wedge x \notin B$$

$$\Updownarrow$$

$$x \notin A \cup B$$

$$\Updownarrow$$

$$x \in \overline{A \cap B}$$

2. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.
הוכחה:
ראשית, נוכיח את הטענה הבאה: $C \subseteq A \cap B \iff C \subseteq A \wedge C \subseteq B$.
הוכחה:
כיוון ראשון: נניח ש $C \subseteq A \cap B$.
יהי $x \in C$. מכיוון ש $C \subseteq A \cap B$ אז $x \in A \cap B \Longleftarrow x \in A \wedge x \in B$. לכן $C \subseteq A \wedge C \subseteq B$.
כיוון שני: נניח $C \subseteq A \wedge C \subseteq B$.
יהי $x \in C$. מכיוון ש $C \subseteq A \wedge C \subseteq B$, אז $x \in A \wedge x \in B \Longleftarrow x \in A \cap B$. מסקנה: $C \subseteq A \cap B$.
כעת, נעבור לתרגיל.

$$C \in P(A \cap B)$$

$$\Updownarrow$$

$$C \subseteq A \cap B$$

$$\Updownarrow$$

$$C \subseteq A \wedge C \subseteq B$$

$$\Updownarrow$$

$$C \in P(A) \wedge C \in P(B)$$

$$\Updownarrow$$

$$C \in P(A) \cap P(B)$$

3. אם $A \subseteq B$ אז $A \cup (B \setminus A) = B$.
פתרון:
נתון: $A \subseteq B$. צ"ל $A \cup (B \setminus A) = B$
נראה הכלה דו כיוונית.

$\subseteq$: יהי $x \in A \vee x \in B \setminus A \Longleftarrow x \in A \cup (B \setminus A)$.
מקרה 1: $x \in B \Longleftarrow x \in B \setminus A$.
מקרה 2: $x \in B \Longleftarrow x \in A$, בגלל הנתון.
$\supseteq$: יהי $x \in B$. יש 2 אפשרויות:
1. $x \in A \cup (B \setminus A) \Longleftarrow x \in A$.
2. $x \in A \cup (B \setminus A) \Longleftarrow x \in B \setminus A \Longleftarrow x \notin A$.

4. $A \subseteq \bar{B} \iff A \cap B = \emptyset$.
פתרון:
$\Longleftarrow$: נניח $A \cap B = \emptyset$.
יהי $x \in A$. מכיוון ש $A \cap B = \emptyset$, לא יתכן ש $x \in \bar{B} \Longleftarrow x \notin B \Longleftarrow x \in B$.
$\Longrightarrow$: נניח $A \subseteq \bar{B}$.
יהי $x \in \bar{B} \wedge x \in B \Longleftarrow x \in A \wedge x \in B \Longleftarrow x \in A \cap B$ (בגלל הנתון ש $A \subseteq \bar{B}$).
וזאת סתירה.
5. $\bar{B} \subseteq \bar{A} \iff A \subseteq B$.
פתרון:
$\Longleftarrow$: נניח $A \subseteq B$, ונוכיח ש $\bar{B} \subseteq \bar{A}$.
יהי $x \notin A \Longleftarrow x \notin B \Longleftarrow x \in \bar{B}$, מכיוון שאם $x \in A$ אז $x \in B$ (כי הנחנו ש $A \subseteq B$). $x \in \bar{A} \Longleftarrow$.
$\Longrightarrow$: נניח $\bar{B} \subseteq \bar{A}$.
יהי $x \notin \bar{B} \Longleftarrow x \notin \bar{A} \Longleftarrow x \in A$, מכיוון שאם $x \in \bar{B}$ אז $x \in \bar{A}$ (כי הנחנו ש $\bar{B} \subseteq \bar{A}$) $x \in B \Longleftarrow$.
6. $\bar{\bar{A}} = A$.
הוכחה:

$$x \in \bar{\bar{A}}$$

$$\Updownarrow$$

$$x \notin \bar{A}$$

$$\Updownarrow$$

$$x \in A$$

הערה: בטענות מנוסח $\iff$ צריך להוכיח שתי גרירות. למשל, בטענה 5 , צריך להוכיח שאם $A \subseteq B$ אז $\bar{B} \subseteq \bar{A}$, וכן שאם $\bar{B} \subseteq \bar{A}$ אז $A \subseteq B$.