

## תרגיל 4 - חשבון אינפי 3 תש"פ - תיכוניסטים

**תרגיל 1.** תהי  $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה ונניח שקיים  $L \in \mathbb{R}$  כך שלכל מסילה

$$\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

שמקיימת

$$\lim_{t \rightarrow b} \gamma(t) = 0$$

מתקיים

$$\lim_{t \rightarrow b} f(\gamma(t)) = L$$

הראו, ש  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$  (כלומר, אם על כל מסלול שלאורכו מתקרבים ל 0 מקבלים אותו גבול  $L$  אז ל  $f$  קיים גבול  $L$ ).

**תרגיל 2.** האם הגבולות הבאים קיימים. במידה וכן, מצאו אותם.

1.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$$

2.

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^4 + y^4 + z^4}$$

3.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

4.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}$$

**תרגיל 3.** קבעו האם הפונקציה  $f$  רציפה בנקודות  $a$  במקרים הבאים:

1.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ב  $a = (0, 0)$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ב  $a = (0, 0)$

3.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} - 1}{\ln \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + 1} & (x, y) \neq (1, 2) \\ 1 & (x, y) = (1, 2) \end{cases}$$

ב  $a = (1, 2)$

4.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} y}{e^{-\frac{2}{x^2}} + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ב  $a = (0, 0)$

**תרגיל 4.** (סעיף ממבחן). תהי  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . הראו שהשפה של  $E$ ,  $\partial E$  היא קבוצת נקודות האי-רציפות של הפונקציה

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

**תרגיל 5.** (ממבחן). הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם הסדרה  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת ל  $a$  ב  $\mathbb{R}^n$ , אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| = \|a\|$ .
2. אם הסדרה  $\{\|a_n\|\}_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת ב  $\mathbb{R}$ , אזי הסדרה  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת ב  $\mathbb{R}^n$ .
3. אם הסדרה  $\{\|a_n\|\}_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת ב  $\mathbb{R}$ , אזי לסדרה  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  יש תת-סדרה מתכנסת ב  $\mathbb{R}^n$ .

**תרגיל 6.** (סעיף ממחבן). תהי  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ו  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ . נאמר, ש  $f$  מקיימת את תנאי ליפשיץ, אם קיים  $0 < M$  כך שלכל  $x, y \in A$  מתקיים:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|$$

הוכיחו/הפריכו: אם  $f$  מקיימת את תנאי ליפשיץ אזי  $f$  רציפה.

**תרגיל 7.** (בונוס)

1. תהי  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה, כאשר  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , תהי  $x_0$  נקודת הצטברות של  $D$ . נניח כי  $D = D_1 \cup \dots \cup D_m$  כאשר  $x_0$  היא נקודת הצטברות של כל  $D_i$ . הוכיחו שמתקיים

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

אם ורק אם לכל  $i$  מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{D_i}(x) = L$$

(רמז: כדאי להשתמש בקריטריון היינה לקיום גבול).

2. הראו שהטענה מהסעיף הקודם אינה נכונה אם לא דורשים שהאיחוד יהיה סופי.

**תרגיל 8.** (בונוס) תהי  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ . הוכיחו שהגבול  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = L$  קיים, אם ורק אם לכל סדרה  $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$  שמתכנסת ל  $0$ , סדרת הפונקציות

$$g_n(\theta) = f(r_n \cos \theta, r_n \sin \theta)$$

מתכנסת במידה שווה לפונקציה קבועה  $L$ .  $g(\theta) = L$