# אלגברה מופשטת – פתרון תרגיל 1

**<u>שאלה 1</u>**

בדקו האם קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ מהווה חבורה למחצה לגבי הפעולות הבינאריות הבאות:

א) $a*b=a^2+ab$;

ב) $a*b=\sqrt{a+b}$;

ג) $a*b=(a^2+b^2)/2$.

**<u>פתרון</u>**

א) לא – אין אסוציאטיביות.

ב) לא – אין אסוציאטיביות.

ג) לא – אין אסוציאטיביות.

מש"ל

**<u>שאלה 2</u>**

בדקו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות עם הפעולות הנתונות האם היא: חבורה למחצה/ מונואיד/ חבורה. כמו כן, בדקו האם הפעולה היא קומוטטיבית (כלומר $ab=ba$ לכל $a,b$ השייכים למבנה).

א. $(\mathbb{Z},\bullet)$ כאשר $a\bullet b=a+b+2$;
ב. $(\mathbb{Z},-)$.

**<u>פתרון</u>**

א. זאת חבורה. איבר היחידה הוא $e=-2$, וההופכי של $b$ הוא $-4-b$. הפעולה היא קומוטטיבית.
ב. הפעולה אינה אסוציאטיבית ולכן זאת לא חבורה למחצה. הפעולה אינה קומוטטיבית.

מש"ל

## שאלה 3

תהיינה $(H,*),(G,\bullet)$ חבורות. נגדיר פעולה $\cdot$ על המכפלה הקרטזית $G\times H$ כדלהלן: $(g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2)=(g_1\bullet g_2,h_1*h_2)$.

הוכיחו כי $G\times H$ היא חבורה תחת פעולה זו.

## פתרון

בדיקה ישירה של התכונות:

סגירות - $(g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2)=(g_1\bullet g_2,h_1*h_2)\Leftrightarrow g_1\bullet g_2\in G,h_1*h_2\in H$

וכמובן ש $g_1\bullet g_2\in G,h_1*h_2\in H$ שהרי $G,H$ חבורות ולכן סגורות לפעולה.

אסוציאטיביות -

$$((g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2))\cdot(g_3,h_3)=(g_1\bullet g_2,h_1*h_2)\cdot(g_3,h_3)=((g_1\bullet g_2)\bullet g_3,(h_1*h_2)*h_3)$$
$$=(g_1\bullet(g_2\bullet g_3),h_1*(h_2*h_3))=(g_1,h_1)\cdot(g_2\bullet g_3,h_2*h_3)$$

איבר היחידה - $(e_G,e_H)$.

הופכי - $(g,h)(g^{-1},h^{-1})=(g\bullet g^{-1},h*h^{-1})=(e_G,e_H)\quad \forall g\in G,h\in H$.

מש"ל

## שאלה 4

א) האם $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R},a^2+b^2>0\right\}$ היא חבורה למחצה, מונואיד או חבורה (ביחס לפעולת כפל מטריצות)?

ב) תהי $G=\left\{\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \mid A,B,C\in\mathbb{R}\right\}$. הוכיחו ש- G היא חבורה ביחס לכפל מטריצות (חבורה זו נקראת **Heisenberg group**). האם היא אבלית (כלומר, האם הפעולה בחבורה היא קומוטטיבית)?

## פתרון

א) ניתן לבדוק על פי בדיקה ישירה שזו חבורה.

ב) סגירות :

$$\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&d&e\\0&1&f\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&d+a&e+af+b\\0&1&f+c\\0&0&1\end{pmatrix}\in G$$

אסוציאטיביות : נובעת מהאסוציאטיביות של כפל מטריצות.
איבר היחידה: מטריצת הזהות.
הופכי : אפשר למצוא בקלות כי ההופכי הינו

$$\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-a&ac-b\\0&1&-c\\0&0&1\end{pmatrix}\in G.$$

החבורה אינה אבלית.

מש"ל

## שאלה 5

תהי $S$ חבורה למחצה סופית, ונניח שמתקיים $aS=Sa=S$ לכל $a\in S$. הוכיחו ש- $S$ מונואיד.

## פתרון

יש להוכיח שקיים איבר נייטרלי. יהי $a\in S$. אזי קיים $b\in S$ עבורו מתקיים $ab=a$. נוכיח ש- $b$ הוא איבר נייטרלי מימין. יהי $c\in S$. נוכיח $cb=c$. קיים $k\in S$ שעבורו $c=ka$ ולכן $cb=(ka)b=k(ab)=ka=c$.

באופן דומה מראים שיש איבר נייטרלי משמאל, ולכן קיים איבר נייטלי (מדוע?).

מש"ל

## שאלה 6

יהי $(M,\cdot)$ מונואיד, ויהי $a\in M$ איבר הפיך. נגדיר $x*y=x\cdot a\cdot y$. בתרגול הוכחנו ש- $(M,*)$ הוא מונואיד. כעת הוכיחו ששני המונואידים $(M,\cdot)$ ו-$(M,*)$ הם איזומורפיים.

**פתרון**

נגדיר הומומורפיזם $f:(M,*)\to(M,\cdot)$ על ידי $f(x)=x\cdot a$ . זהו אכן הומומורפיזם שכן מתקיים $f(x*y)=f(x\cdot a\cdot y)=(x\cdot a\cdot y)\cdot a=(x\cdot a)\cdot(y\cdot a)=f(x)\cdot f(y)$ . בנוסף מתקיים $f(a^{-1})=a^{-1}\cdot a=e$ ולכן זהו הומומורפיזם של מונואידים.

נוכיח ש- $f$ חח"ע ועל.

חח"ע: אם $f(x)=f(y)$ אזי $x\cdot a=y\cdot a$ ולכן $x=y$ (מדוע?).

על: יהי $m\in(M,\cdot)$ אזי המקור שלו הוא האיבר $m\cdot a^{-1}$ (בדקו!).

מש"ל