חשבון אינפי 1 למדמ"ח

תרגיל 4- פתרון

1. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו את תחומי ההגדרה של הפונקציה ושל הנגזרת. בנקודות בהן הנגזרת קיימת מצאו את $\varepsilon(x,\triangle x)$ המקיים $\triangle y = dy + \varepsilon \triangle x$.
הוכיחו ש- $\varepsilon(x,\triangle x)$ שמצאתם אינפיניטסימלי כאשר $\triangle x \approx 0$:

א. $y = 2\sqrt{x}$

פתרון:

$$D(y) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$$

$y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ולכן $D(y') = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$

$$\triangle y = 2\sqrt{x + \triangle x} - 2\sqrt{x}$$

$$dy = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$\triangle y = dy + \varepsilon \triangle x$ ולכן

$$\varepsilon(x,\triangle x) = \frac{\triangle y - dy}{\triangle x} = \frac{2\sqrt{x+\triangle x} - 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\triangle x}{\triangle x} = \frac{2\sqrt{x^2 + x\triangle x} - 2x - \triangle x}{\triangle x\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x^2 + x\triangle x} - (2x + \triangle x)}{\triangle x\sqrt{x}}$$

נכפול ונחלק ב"צמוד" של המונה ונקבל

$$\varepsilon(x,\triangle x) = \frac{4\left(x^2 + x\triangle x\right) - \left(2x + \triangle x\right)^2}{\triangle x\sqrt{x}\left(2\sqrt{x^2 + x\triangle x} + 2x + \triangle x\right)} = \frac{-\triangle x^2}{\triangle x\sqrt{x}\left(2\sqrt{x^2 + x\triangle x} + 2x + \triangle x\right)}$$

$$= \frac{-\triangle x}{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x^2 + x\triangle x} + 2x + \triangle x\right)} \approx 0$$

הביטוי האחרון אכן אינפיניטסימלי, כי המונה אינפיניטסימלי ומכנה סופי שאינו אינפיניטסימלי.

ב. $y = x^{-2}$

פתרון:

$$D(y) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$y' = -2x^{-3}$ ולכן $D(y') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\varepsilon(x,\triangle x)=\frac{\triangle y-dy}{\triangle x}=\frac{(x+\triangle x)^{-2}-x^{-2}+2x^{-3}\triangle x}{\triangle x}=\frac{\frac{1}{(x+\triangle x)^2}-\frac{1}{x^2}+\frac{2\triangle x}{x^3}}{\triangle x}$$

$$=\frac{x^3-x(x+\triangle x)^2+2(x+\triangle x)^2\triangle x}{x^3(x+\triangle x)^2\triangle x}=\frac{-x\triangle x^2+4x\triangle x^2+2\triangle x^3}{x^3(x+\triangle x)^2\triangle x}=\frac{(-x+4x+2\triangle x)\triangle x}{x^3(x+\triangle x)^2}\approx 0$$

הביטוי האחרון אכן אינפיניטסימלי, כי המונה אינפיניטסימלי ומכנה סופי שאינו אינפיניטסימלי.

ג. $y=4x+x^3$

פתרון:

$D(y)=\mathbb{R}$

$D(y)=\mathbb{R}$ **ולכן** $y'=4+3x^2$

$$\varepsilon(x,\triangle x)=\frac{\triangle y-dy}{\triangle x}=\frac{4(x+\triangle x)+(x+\triangle x)^3-4x-x^3-4\triangle x-3x^2\triangle x}{\triangle x}=\frac{3x\triangle x^2+\triangle x^3}{\triangle x}=\triangle x(3x+\triangle x)\approx 0$$

2. גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $u=-\left(2x+3+4x^{-1}\right)^{-1}$

פתרון:

$$\frac{du}{dx}=\left(2x+3+4x^{-1}\right)^{-2}\left(2-4x^{-2}\right)$$

ב. $v=\frac{2x^{-1}-x^{-2}}{3x^{-1}-4x^{-2}}$

פתרון:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{\left(-2x^{-2}+2x^{-3}\right)\left(3x^{-1}-4x^{-2}\right)-\left(2x^{-1}-x^{-2}\right)\left(-3x^{-2}+8x^{-3}\right)}{\left(3x^{-1}-4x^{-2}\right)^2}$$

$$=\frac{(-2x+2)(3x-4)-(2x-1)(-3x+8)}{x(3x-4)^2}=\frac{-5x}{x(3x-4)^2}=-\frac{5}{(3x-4)^2}$$

ג. $w=3\left(x^2+1\right)\left(2x^2-1\right)(2x+3)$

פתרון:

$$\frac{dw}{dx}=3\cdot 2x\left(2x^2-1\right)(2x+3)+3\left(x^2+1\right)\cdot 4x(2x+3)+3\left(x^2+1\right)\left(2x^2-1\right)\cdot 2$$

$$=60x^4+72x^3+18x^2+18x-6$$

3. יהיו u ו-v פונקציות של x. מצאו את dy במונחים של du ו-dv :

א. $y=u^2v$

פתרון:

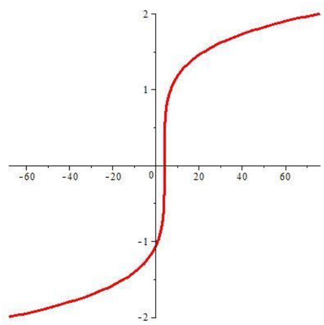
$$dy=2uvdu+u^2dv$$

ב. $y=\frac{1}{u+v}$

פתרון:

$$dy=-\frac{1}{(u+v)^2}(du+dv)=-\frac{1}{(u+v)^2}du-\frac{1}{(u+v)^2}dv$$

4. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $x=2y^5+y^3+4$ בנקודה $(7,1)$. (שימו לב הגרף הינו במישור (x,y) - ראו שרטוט).



פתרון:

לפי הגרף רואים שהפונקציה הפיכה (לכל תמונה x יש מקור יחיד y) ולכן לפי משפט הנגזרת של הפונקציה ההפוכה נקבל ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(7,1)$

הינו $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(7,1)}=\left.\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right|_{(7,1)}=\left.\frac{1}{10y^4+3y^2}\right|_{(7,1)}=\frac{1}{13}$ ולכן משוואת המשיק היא

$l(x)=\frac{1}{13}(x-7)+1=\frac{1}{13}x+\frac{6}{13}$.

5. מצאו את הפונקציה ההפוכה y ואת הנגזרת $\frac{dy}{dx}$ כפונקציות מפורשות של x :

א. $x=y^2+3y-1,\quad y\ge-\frac{3}{2}$

פתרון:

נפתור את המשוואה $x=y^2+3y-1$ ביחס ל- y ונקבל

$$y^2+3y-1-x=0$$

$$y_1=\frac{-3+\sqrt{9+4(1+x)}}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13+4x}}{2}\ge-\frac{3}{2}$$

$y_2=\frac{-3-\sqrt{9+4(1+x)}}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13+4x}}{2}\le-\frac{3}{2}$ ולכן לא מתאים.

כלומר הפונקציה ההפוכה $y=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13+4x}}{2}$, $D(y)=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x\ge-\frac{13}{4}\right\}$.

לפי משפט הנגזרת של הפונקציה ההפוכה מתקיים :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2y+3}=\frac{1}{2\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13+4x}}{2}\right)+3}=\frac{1}{\sqrt{13+4x}}$$

ב. $y>0$ $x=\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}-1,$ רמז : הציבו $t=\frac{1}{y}$

פתרון: נציב $t=\frac{1}{y}>0$ ונקבל $x=t^2+t-1$.

נפתור ביחס ל- t ונקבל

$$t^2+t-1-x=0$$

$$t_1=\frac{-1+\sqrt{1+4(1+x)}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5+4x}}{2}$$

נשים לב ש- $t^2+t=x+1>0$ ולכן $x>-1$ ולכן $5+4x>1$ ומכאן

$$t_1=\frac{-1+\sqrt{5+4x}}{2}>0$$

$t_2=\frac{-1-\sqrt{1+4(1+x)}}{2}=\frac{-1-\sqrt{5+4x}}{2}<0$ ולכן לא מתאים.

לסיכום נקבל $y=\frac{2}{-1+\sqrt{5+4x}}>0$.

לפי משפט הנגזרת של הפונקציה ההפוכה מתקיים :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{-\frac{2}{y^3}-\frac{1}{y^2}}=\frac{y^3}{-2-y}=\frac{\left(\frac{2}{-1+\sqrt{5+4x}}\right)^3}{-2-\frac{2}{-1+\sqrt{5+4x}}}=\frac{-4}{\sqrt{5+4x}\left(-1+\sqrt{5+4x}\right)^2}$$

ג. $x = y^4 + y^2 + 1, \quad y \geq 0$

פתרון: נסמן $t = y^2 \geq 0$ ונפתור את המשוואה $x = t^2 + t + 1$ ביחס ל- t.

$$t^2 + t + 1 - x = 0$$

$$t_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4(1-x)}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{4x-3}}{2}$$

נשים לב ש- $x \geq 1$ ולכן $t_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4(1-x)}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{4x-3}}{2} \geq 0$

$t_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4(1-x)}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{4x-3}}{2} < 0$ ולכן לא מתאים.

לסיכום נקבל $y^2 = \frac{-1 + \sqrt{4x-3}}{2}$ ומאחר ש- $y \geq 0$ נקבל $y = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{4x-3}}{2}}$.

לפי משפט הנגזרת של פונקציה הפוכה נקבל

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{4y^3 + 2y} = \frac{1}{4\left(\frac{-1+\sqrt{4x-3}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{\frac{-1+\sqrt{4x-3}}{2}}}$$

6. הוכיחו, כי לפונקציה $y = f(x)$ קיימת פונקציה הפוכה אם ורק אם לכל x_1, x_2 כך ש- $x_1 \neq x_2$ מתקיים $f(x_1) \neq f(x_2)$. (הערה: אפשר לצאת מנקודת הנחה שקבוצת התמונות היא הטווח של הפונקציה, כלומר הפונקציה היא על)

הוכחה:

נניח כי $y = f(x)$ הפיכה, כלומר קיימת פונקציה $x = g(y)$ בעלת אותו גרף כמו $y = f(x)$.

נניח בשלילה שקיימים x_1, x_2 כך ש- $x_1 \neq x_2$ אבל $f(x_1) = f(x_2)$, כלומר $y_1 = y_2$ ומכאן $x_1 = g(y_1) = g(y_2) = x_2$ בסתירה להנחה ש- $x_1 \neq x_2$ ולכן הנחת השלילה לא נכונה ולכל x_1, x_2 כך ש- $x_1 \neq x_2$ מתקיים $f(x_1) \neq f(x_2)$. **ע"כ הכיוון הראשון של הטענה.**

נניח שלכל x_1, x_2 כך ש- $x_1 \neq x_2$ מתקיים $f(x_1) \neq f(x_2)$ ונוכיח ש- $y = f(x)$ הפיכה.

נניח בשלילה ש- $y = f(x)$ לא הפיכה, כלומר אם נפתור את המשוואה $y = f(x)$ ביחס ל- x נקבל לפחות שני פתרונות שונים $x_1 = g_1(y)$ ו- $x_2 = g_2(y)$ כך ש- $x_1 \neq x_2$ כאשר $f(x_1) = y = f(x_2)$ בסתירה להנחה ש- $f(x_1) \neq f(x_2)$ ולכן הנחת השלילה לא נכונה ו- $y = f(x)$ הפיכה. (שימו לב שלא יתכן שלמשוואה $y = f(x)$ לא יהיה פתרון ביחס ל- x עבור y כלשהו, כי הנחנו שהפונקציה היא על)

מש"ל