

תרגיל 12

1. נתונים חמישה מספרים בני חמש ספרות, כולם מתחלקים ב-17: 21029, 12342, 52292, 3660147277, נרכיב מטריצה  $A \in R^{5 \times 5}$ , שבכל רכיב שלה תופיע ספרה אחת:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 7 & 7 \\ 5 & 2 & 2 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

. ללא חישוב הדטרמיננטה.

2. חשבו מתי המטריצות הבאות הפיכות:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & . & . & b \\ b & a & . & . & . \\ \vdots & . & . & . & b \\ . & . & . & b & a \\ b & . & . & b & a \end{pmatrix}$$

3. יהא  $n$  אי זוגי, ותא  $A \in F^{n \times n}$  מטריצה אנטי-סימטרית (כלומר  $A^t = -A$ ).

א. הוכח שאם  $F \neq \mathbb{Z}_2$ , אזי  $|A| = 0$ .

ב. האם סעיף א נכון גם כאשר  $F = \mathbb{Z}_2$ ?

4. תהא  $A \in R^{n \times n}$ , כך שלכל  $i, j$  מתקיים  $a_{ij} \in \{1, -1\}$ . הוכח ש- $2^{n-1}$  מחלק את  $\det(A)$ .  
(כלומר קיים  $k \in Z$  כך ש- $\det(A) = k \cdot 2^{n-1}$ ).

5

יהיו  $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ . המטריצה  $A \in F^{n \times n}$  נקראת

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & . & . & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & . & . & a_2^{n-1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & a_n & a_n^2 & a_n^3 & . & . & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

מטריצת ונדרמונדה.

א. חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הנ"ל.

- הדרכה: 1. בצע  $c_i - a_1 c_{i-1} \rightarrow c_i$  עבור  $i = n, n-1, \dots, 2, 1$ .  
2. פתח לפי השורה הראשונה באינדוקציה.  
3. מכל שורה  $i$  הוצא את הגורם  $a_i - a_1$ .

ב. מתי מטריצת ונדרמונדה הפיכה?

6. הוכח בעזרת פיתוח לפי שורה/עמודה (מינורים) :  
 a. אם יש ב A שורת/ עמודת אפסים אזי  $|A| = 0$ .  
 b. אם A משולשית, אזי  $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{mm}$ .

7. השאלה הזאת היא על מטריצות עם 3 על האלכסון הראשי, ו-2 על האלכסון מעל, ו-1 על האלכסון מתחת לאלכסון הראשי.

$$A_1 = [3], A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \dots, A_n = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

a. מה הדטרמיננטות של  $A_2$  ו  $A_3$  ?

- b. נשים  $d_n = |A_n|$ . השתמש בפיתוח דטרמיננטה בקופקטורים לפי השורה הראשונה ועמודה ראשונה כדי למצוא מספרים  $a$  ו  $b$  כך ש  
 (\*)  $d_n = ad_{n-1} + bd_{n-2}$