תרגיל 2

להגשה עד 20.11.17

שאלה 1

תהי m מידת לבג על המלבן $[0,1]^2$. נניח כי לכל $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subseteq [0,1]^2$ הינה קבוצה מדידה לבג.
תהי B קבוצת כל ה־x־ים המופיעים באינסוף קבוצות A_n.
הוכיחו כי:

1. B מדידה לבג.
2. אם $m(A_n) > \delta > 0$ לכל n, אזי $m(B) > 0$.
3. אם $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$ אזי $m(B) = 0$.
4. תנו דוגמא למקרה בו $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$ ו־ $m(B) = 0$

שאלה 2

תהי $A \subset \mathbb{R}^2$ קבוצה מדידה לבג, עבורה קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל מלבן $P \subset \mathbb{R}^2$ מתקיים: $m(A \cap P) \leq m(P)(1-\epsilon)$,
הוכיחו כי $m(A) = 0$.

שאלה 3

נניח כי הקבוצה $A \subset \mathbb{R}$ מדידה לבג. נגדיר:

$$B := \bigcup_{x \in A} [x-1, x+1].$$

הוכיחו כי הקבוצה B מדידה לבג.

שאלה 4

תהינה $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציות רציפות וגזירות ברציפות.
הוכיחו כי מידת לבג (הדו ממדית) של העקומה החלקה: $A := \{(f(x), g(x)) : x \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$ היא אפס.

שאלה 5

נניח ש $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ הינן מידות על מרחב מדיד $(X, \mathbb{A})$ ולכל $A \in \mathbb{A}$: $\mu_n(A) \nearrow$.

נגדיר: $\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$. האם μ הינה מידה? אם לא תנו דוגמא נגדית.

בהנאה :)