אינפי 4 תרגול 10

10 ביוני 2015

יריעות:

הגדרה:

קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת יריעה k מימדית אם לכל $a \in M$ קיימות קבוצה פתוחה $V_a \subseteq M$, קבוצה פתוחה $\Omega_a \subseteq \mathbb{R}^k$ והעתקה:

$$\varphi_a : \Omega_a \to V_a$$

חח"ע ועל (זו פונקציה וקטורית: $(\varphi_a(x_1, \ldots, x_k) = (\varphi_1(x_1, \ldots x_k), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_k))$), כך שמתקיים:

$$rank\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right) = k$$

כלומר דרגת היעקוביאן היא מקסימלית לכל נקודה ב־M (תכונה זו נקראת רגולריות).

הזוג (Ω_a, φ_a) נקרא מפה של היריעה M.

אוסף מפות $\{(\Omega_a, \varphi_a)\}_{a\in I}$ המכסה את היריעה M נקרא אטלס.

ההעתקה: $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : \Omega_i \to \Omega_j$ נקראת העתקת מעבר.

נשים לב שיריעה k מימדית נראית, מקומית, כמו $\mathbb{R}^k$, מה שמאפשר לעבוד איתה ביתר קלות (ואנו כבר עשינו אינטגרלים על מסילות, שהן יריעות חד־מימדיות ועל משטחים שהם יריעות דו־מימדיות).

<u>לדוגמה:</u>

נתבונן בספירת היחידה $S^2 \subset \mathbb{R}^3$:

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

נסמן: $\Omega = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + s^2 < 1\}$, כלומר עיגול היחידה ללא השפה. כעת, נגדיר פונקציות:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6 : \Omega \to S^2$$

ע"י:

$$\varphi_1(t,s)=(t,s,\sqrt{1-t^2-s^2})$$
$$\varphi_2(t,s)=(t,s,-\sqrt{1-t^2-s^2})$$
$$\varphi_3(t,s)=(t,\sqrt{1-t^2-s^2},s)$$
$$\varphi_4(t,s)=(t,-\sqrt{1-t^2-s^2},s)$$
$$\varphi_5(t,s)=(\sqrt{1-t^2-s^2},t,s)$$
$$\varphi_6(t,s)=(-\sqrt{1-t^2-s^2},t,s)$$

כל אחת מההעתקות האלה מכסה המיספירה.

למה יש צורך בכל ההעתקות? שתי העתקות מכסות שתי המיספירות נגדיות; מכיוון שהמקור הוא קבוצה פתוחה, ההמיספירות האלו מכסות את כל הספירה למעט "קו המשווה", מעגל שמקיף את הספירה.

אנחנו צריכים לכסות גם את המעגל, ואם נכסה עוד שתי המיספירות, נכסה את כל המעגל הנותר למעט שתי נקודות אנטיפודיות. נוסיף עוד שתי המיספירות ונכסה את שתי הנקודות הנותרות.

אם כן, אטלס של הספירה הוא:

$$\{(\Omega,\varphi_i)\}_{i=1}^{6}$$

כמובן, יש עוד אטלסים אפשריים.

כאשר הקבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ נתונה בצורה סתומה:

$$M=\left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\begin{array}{c}g_1(x_1,\dots,x_n)=0\\ \vdots\\ g_k(x_1,\dots x_n)=0\end{array}\right\}$$

התנאי לכך ש$-M$ יריעה הוא:

$$rank\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)=k$$

לכל נקודה ב$-M$.

<u>לדוגמה:</u>

1.$M=\{(x,y):xy-1=0\}$.

זוהי היפרבולה, $g(x,y)=xy-1$. היעקוביאן הוא:

$$\nabla g=(y,x)$$

והדרגה היא 1 אלא אם $(x,y)=(0,0)$. אלא שהנקודה $(0,0)$ לא שייכת ל$-M$ ולכן M יריעה.

2. $M=\{(x,y):xy=0\}$.

אלו הם הצירים. בדומה ל-1, הדרגה היא 1 אלא אם $(x,y)=(0,0)$, אך במקרה זה $(0,0)\in M$ ולכן M אינה יריעה.

3. $M=\left\{(x,y,z):\begin{array}{c}x^2+y^2+z^2-1=0\\ x+y+z-1=0\end{array}\right\}$.

זהו מישור החותך את ספירת היחידה. היעקוביאן הוא:

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

והדרגה היא 2 אלא אם $x=y=z$. האם יש נקודה כזו ב$-M$?

מהמשוואה השנייה נקבל: $3x=3y=3z=1$ כלומר $x=y=z=\frac{1}{3}$, אך נקודה זו לא מקיימת את המשוואה השנייה ולכן אין נקודות כאלו ב$-M$, כלומר M יריעה.

<u>תרגיל:</u>

האם הקבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^2$ יריעה? אם כן, מצאו אטלס מתאים.

א. $M=\{(x,y):y-x^3=0\}$.

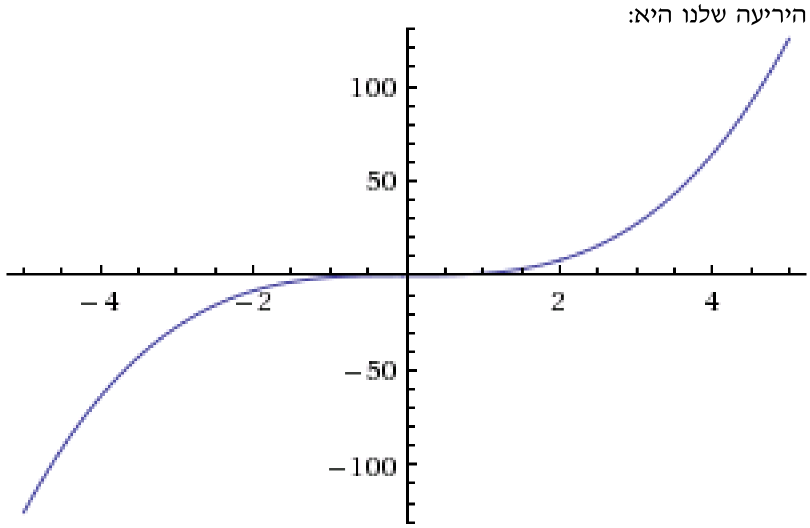
<u>פתרון:</u>

היעקוביאן הוא:

$$\begin{pmatrix} -3x^2 & 1 \end{pmatrix}$$

והדרגה היא תמיד 1 ולכן זו יריעה.

היריעה שלנו היא:



נגדיר פונקציה $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ ע"י: $\varphi(t)=(t,t^3)$ ואז אטלס מתאים הוא:

$$\{(\mathbb{R},\varphi)\}$$

ב. $M=\{(x,y):y^2-x^3=0\}$.

<u>פתרון:</u>

במקרה זה, היעקוביאן הוא:

$$\begin{pmatrix} 3x^2 & 2y \end{pmatrix}$$

והדרגה היא 0 בנקודה $(0,0)\in M$, ולכן M לא יריעה.

ג. $M=\{(x,y):9x^2+y^2-1=0\}$.

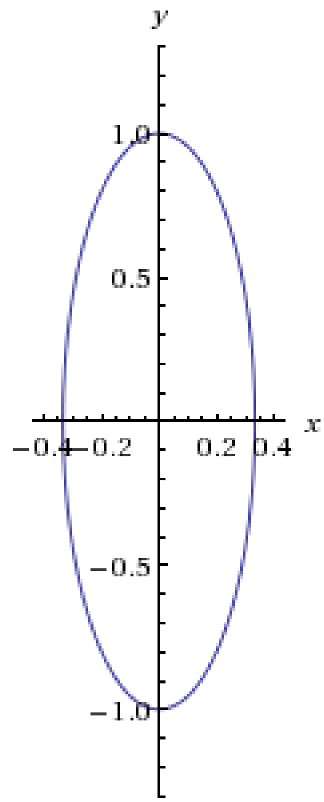
<u>פתרון:</u>

היעקוביאן הוא:

$$\begin{pmatrix} 18x & 2y \end{pmatrix}$$

והדרגה היא 1 אלא אם $(x,y)=(0,0)$, אך $(0,0)\notin M$ ולכן M יריעה.

היריעה שלנו היא:



בדומה לספירה, נכסה את האליפסה באמצעות ארבעה חצאי אליפסה. נסמן:

$$\Omega = (-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})$$
$$D = (-1, 1)$$

ונגדיר פונקציות:

$$\varphi_1, \varphi_2 : \Omega \to M$$
$$\varphi_1(t) = (t, \sqrt{1-9t^2}), \varphi_2(t) = (t, -\sqrt{1-9t^2})$$
$$\varphi_3, \varphi_4 : D \to M$$
$$\varphi_3(t) = (\tfrac{\sqrt{1-t^2}}{3}, t), \varphi_4(t) = (-\tfrac{\sqrt{1-t^2}}{3}, t)$$

ונקבל אטלס לדוגמה:

$$\{(\Omega, \varphi_1), (\Omega, \varphi_2), (D, \varphi_3), (D, \varphi_4)\}$$

<u>תרגיל:</u>

נגדיר את הקבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$M = \{(x,y,z) : z - x^2 - y^2 = 0\}$$

האם זו יריעה? אם כן, מצאו לה אטלס.

<u>פתרון:</u>

היעקוביאן הוא:

$$\begin{pmatrix} -2x & -2y & 1 \end{pmatrix}$$

והדרגה היא תמיד 1ולכן M היא יריעה.

אם נגדיר $\varphi : \mathbb{R}^2 \to M$ ע"י $\varphi(t,s) = (t, s, t^2 + s^2)$ נקבל אטלס:

$$\{(\mathbb{R}^2, \varphi)\}$$