מערך תרגול 7

21 בדצמבר 2016

תרגיל: הוכיחו כי אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ אזי $A\subseteq B$ או $B\subseteq A$.

פתרון: נניח בשלילה כי $A\nsubseteq B$ וגם $B\nsubseteq A$, כלומר: $\exists x\in A: x\notin B\wedge\exists y\in B: y\notin A$
כעת,

$$x,y\in A\cup B\implies\{x,y\}\subseteq A\cup B\implies\{x,y\}\in P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$$

כאשר השיוויון האחרון זה הנתון.
לכן,

$$\{x,y\}\in P(A)\vee\{x,y\}\in P(B)\implies\{x,y\}\subseteq A\vee\{x,y\}\subseteq B\implies(x\in A\wedge y\in A)\vee(x\in B\wedge y\in B)$$

בסתירה לכך ש $x\notin B\wedge y\notin A$.

תרגיל: הוכיחו כי: $A\Delta B=A^c\Delta B^c$.

פתרון: נשתמש בכך ש $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.
לכן:

$$x\in A\Delta B\iff(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\iff(x\notin A^c\wedge x\in B^c)\vee(x\notin B^c\wedge x\in A^c)$$

כעת מקומוטטביות נקבל:

$$(x\notin B^c\wedge x\in A^c)\vee(x\notin A^c\wedge x\in B^c)\iff(x\in A^c\wedge x\notin B^c)\vee(x\in B^c\wedge x\notin A^c)\iff x\in A^c\Delta B^c$$

סימון: גודל (עוצמה) של קבוצה A יסומן ע"י $|A|$. למשל: עבור $A=\{1,3\}$, $|A|=2$.

הכלה והדחה:

יהיו A וB קבוצות מגודל סופי, כלומר: $|A|,|B| < \infty$. אזי: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

הערה: אם A זר ל B, כלומר: $A \cap B = \emptyset$ אזי $|A \cup B| = |A| + |B|$. זה המצב הפשוט יותר, שממנו מוכיחים למקרה הכללי.

תרגיל: אם $B \subseteq A$ אזי $|B \setminus A| = |B| - |A|$.

פתרון: ראינו בתרגול קודם כי אם $A \subseteq B$, אזי $B = (B \setminus A) \cup A$. כיוון ש $B \setminus A$ ו A זרות נקבל כי:

$$|B| = |(B \setminus A) \cup A| = |B \setminus A| + |A|$$

לכן, אם נעביר אגפים, נקבל את הדרוש.

תרגיל: יהיו A וB קבוצות כך ש $|A|$ו $|B|$ מאותה זוגיות (שניהם זוגיים או שניהם אי זוגיים), אזי $|A \Delta B|$ זוגי.

פתרון: נשתמש בשקילות: $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

כיוון ש $A \cap B \subseteq A \cup B$ נקבל מתרגיל קודם כי:

$$|A \Delta B| = |(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = |A \cup B| - |A \cap B|$$

כעת מהכלה והדחה, זה שווה ל:

$$|A| + |B| - |A \cap B| - |A \cap B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

כיוון ש $|A|$ו $|B|$ שניהם זוגיים או שניהם אי זוגיים נקבל כי $|A| + |B|$ זוגי, ולכן $|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$ זוגי כהפרש של מספרים זוגיים.

תרגיל: הוכיחו כי $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.

פתרון: ניתן כמובן להוכיח ע"י הכלה דו כיוונית, אנחנו נשתמש בשקילויות שכבר הוכחנו:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) = ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \cup (A \cap B) = (A \Delta B) \cup (A \cap B) = ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)$$

המעבר הראשון הוא אסוציאטביות, והשני והשלישי שקילות של ההפרש הסימטרי.

כעת, כיוון ש $A \cap B \subseteq A \cup B$, לפי תרגיל מתרגול שעבר:

$$((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) = A \cup B$$

לכן בסה"כ קיבלנו את הדרוש.