מבחן לינארית 1 קיץ תשפ"ב מועד ב'

11.9.2022

מרצים: גיא בלשר, אריאל ויצמן, אלעד עטייא, ארז שיינר.
מתרגלים: שחר חנניה, נעה כהן, כנה נהיר, גלעד פורת־קורן, עידו פלדמן, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל.

הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- משך המבחן: שלוש שעות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי – מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- יש לכתוב בכל תשובה פתרון מלא ומפורט.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תיבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

1. (24 נק') יהי פרמטר $a \in \mathbb{R}$. נתבונן במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -a^2 & -3 & 1 \\ a & 1 & a^2-1 \\ 0 & a-3 & a^3-a+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$$

ובווקטור העמודה

$$.b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ a^2+a-1 \\ a^3+a^2-a-3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

(א) קבעו לכל ערך של הפרמטר a האם למערכת המשוואות ההומוגנית $Ax = 0$ יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון (מעל שדה הממשיים).

(ב) קבעו לכל ערך של הפרמטר a האם למערכת המשוואות $Ax = b$ יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון (מעל שדה הממשיים).

(ג) האם קיים ערך של הפרמטר a כך שלכל $w \in \mathbb{R}^4$ קיים לפחות פתרון אחד למערכת $Ax = w$ (מעל שדה הממשיים)? הוכיחו את תשובתכם.

פתרון.

(א) מהסתכלות על הסעיף הבא, נדרג את A יחד עם b כווקטור הקבועים במערכת (לצורך סעיף זה מספיק לדרג רק את A, אבל זה יחסוך לנו דירוג אחר כך):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 1 \\ -a^2 & -3 & 1 & -3 \\ a & 1 & a^2-1 & a^2+a-1 \\ 0 & a-3 & a^3-a+1 & a^3+a^2-a-3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 + aR_1}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-3 & 1 & a-3 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a^2+a-2 \\ 0 & a-3 & a^3-a+1 & a^3+a^2-a-3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - R_2}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-3 & 1 & a-3 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a^2+a-2 \\ 0 & 0 & a^3-a & a^3+a^2-2a \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - aR_3}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-3 & 1 & a-3 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a^2+a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

בצד שמאל אנחנו רואים את הצורה המדורגת של A.
נזכור כי למערכת הומוגנית תמיד יש לפחות פתרון אחד (הטריוויאלי), ולכן אין ערכי a שעבורם אין פתרון. כל עוד $a \neq 0, \pm 1, 3$, קיבלנו צורה מדורגת שבה אין משתנים חופשיים, ולכן במקרים אלו יש פתרון יחיד. עבור $a = 0, \pm 1, 3$ המטריצה שקיבלנו

לא בהכרח מדורגת, אבל בהכרח אחרי דירוג יהיה בה משתנה חופשי (עבור $a=0$ זהו x_1, עבור $a=3$ זהו x_2, ועבור $a=\pm1$ זהו x_3), ולכן יהיו אינסוף פתרונות למערכת.

לסיכום: עבור $a\neq 0,\pm1,3$ יש פתרון יחיד למערכת, ועבור $a=0,\pm1,3$ יש אינסוף פתרונות למערכת.

(ב) אין צורך לדרג מחדש, כי דירגנו את A מלכתחילה יחד עם b. ראשית, השורה האחרונה התאפסה גם ב-A וגם ב-b, ולכן היא לא מהווה סתירה.
כל עוד $a\neq 0,\pm1,3$, אין שורות סתירה ואין משתנים חופשיים, ולכן יש פתרון יחיד.
נבדוק כל אחד מהמקרים החשודים לגופו:

- עבור $a=0$: נציב ונמשיך לדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftarrow R_3+3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ואין פתרון במקרה זה.

- עבור $a=1$: נציב ונקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

זו מטריצה מדורגת שאין בה שורות סתירה ויש משתנה חופשי, ולכן למערכת $Ax=b$ יש אינסוף פתרונות במקרה זה.

- עבור $a=-1$: נציב ונקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

השורה השלישית היא שורת סתירה, ואין פתרון במקרה זה.

- עבור $a=3$: נציב ונקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-8R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

וקיבלנו שורת סתירה, כלומר אין פתרון למערכת.

לסיכום: עבור $a\neq 0,\pm1,3$ יש פתרון יחיד למערכת $Ax=b$, עבור $a=1$ יש אינסוף פתרונות למערכת, ועבור $a=0,-1,3$ אין פתרון למערכת.

(ג) נטען כי אין ערך $a\in\mathbb{R}$ כזה. אכן, למערכת $Ax=w$ יש פתרון אם ורק אם $w\in C(A)$. לכן לכל $w\in\mathbb{R}^4$ יש פתרון למערכת $Ax=w$ אם ורק אם $C(A)=\mathbb{R}^4$.
אבל אז היינו מקבלים $\mathrm{rank}(A)=4$, בסתירה לכך שב-A יש רק 3 עמודות.

2. (24 נק') נביט ב-$\mathbb{R}_3[x] = \left\{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\right\}$ מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה לכל היותר 3.
לכל $c \in \mathbb{R}$, נגדיר תת־קבוצה של $\mathbb{R}_3[x]$ על ידי

$$U_c = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(c) = p(-c) = 0\}.$$

(א) הוכיחו כי לכל $c \in \mathbb{R}$ מתקיים כי U_c הוא תת־מרחב של $\mathbb{R}_3[x]$.

(ב) מצאו בסיס ומימד ל-U_1.

(ג) הראו כי קיים $c \in \mathbb{R}$ שעבורו $\dim U_c = 3$, ומצאו בסיס ומימד ל-U_c במקרה זה.

פתרון.

(א) ניעזר בקריטריון המקוצר לתת־מרחב. ראשית, לכל $c \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $p(x) = 0 \in U_c$, כי $p(c) = p(-c) = 0$ לכל $c \in \mathbb{R}$.
כעת, יהיו $p_1(x), p_2(x) \in U_c$, ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. נסמן $q(x) = p_1(x) + \alpha p_2(x)$. אזי

$$q(c) = p_1(c) + \alpha p_2(c) = 0 + \alpha \cdot 0 = 0$$
$$q(-c) = p_1(-c) + \alpha p_2(-c) = 0 + \alpha \cdot 0 = 0$$

ולכן $q(x) \in U_c$. לפי הקריטריון המקוצר, נקבל ש-U_c הוא תת־מרחב של $\mathbb{R}_3[x]$.

(ב) נשים לב כי

$$U_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = p(-1) = 0\} = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid \begin{matrix} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{matrix}\right\}.$$

נמצא פתרון כללי למערכת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow -\frac{1}{2}R_2}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נסמן את המשתנים החופשיים $a_2 = t$ ו-$a_3 = s$, ואז הפתרון הכללי למערכת הוא $-t - sx + tx^2 + sx^3 = t(x^2 - 1) + s(x^3 - x)$. כלומר $\left\{x^2 - 1, x^3 - x\right\}$ הוא בסיס של U_1, ו-$\dim U_1 = 2$.

(ג) נראה כי עבור $c = 0$ מתקיים $\dim U_0 = 3$. במקרה זה

$$U_0 = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = 0\} = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0 = 0\right\}.$$

אז $\left\{x, x^2, x^3\right\}$ הוא בסיס של U_0, ואכן $\dim U_0 = 3$.

3. (18 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית.

(א) <u>הוכיחו או הפריכו:</u> אם $n = 3$, אז קיימת מטריצה $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ שעבורה מתקיים $R(A) = R(B)$, $C(A) = C(B)$ וגם $\det(B) = -\det(A)$.

(ב) <u>הוכיחו או הפריכו:</u> אם $n = 2$, אז קיימת מטריצה $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ שעבורה מתקיים $R(A) = R(B)$, $C(A) = C(B)$ וגם $\det(B) = -\det(A)$.

פתרון.

(א) <u>הוכחה.</u> נבחר $B = -A$. אז $R(B) = R(A)$ ו-$C(B) = C(A)$, כי כפל בסקלר שונה מ-0 אינו משנה את מרחבי השורות והעמודות; כמו כן, לפי תכונות הדטרמיננטה שראינו בהרצאה, $\det(B) = \det(-A) = (-1)^3 \det(A) = -\det(A)$. לכן קיימת B כזו.

(ב) <u>הוכחה.</u> הפעם אי-אפשר לבחור $B = -A$: כיוון שהגודל של המטריצה זוגי, נקבל שמתקיים $\det(B) = \det(-A) = (-1)^2 \det(A) = \det(A)$.
במקום זה, נחלק לשני מקרים:

- אם A הפיכה, אז לפי משפט מההרצאה מתקיים $R(A) = \mathbb{R}^n$ וגם $C(A) = \mathbb{R}^n$. נגדיר את B להיות A לאחר שכפלנו את השורה הראשונה שלה ב-(-1). לפי תכונות הדטרמיננטה, $\det(B) = -\det(A)$. כמו כן, גם B הפיכה (כי היא התקבלה מ-A לאחר ביצוע פעולת שורה אלמנטרית), ולכן גם $R(B) = \mathbb{R}^n$ ו-$C(B) = \mathbb{R}^n$, כנדרש.
- אם A אינה הפיכה, אז $\det(A) = 0$, ואז אפשר לבחור $B = A$ (או כל כפולה בסקלר לא אפסי של A). אכן, $\det(B) = 0 = -\det(A)$, וכן $R(B) = R(A)$ ו-$C(B) = C(A)$ באופן טריוויאלי.

4. (20 נק') יהיו V, W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל $\mathbb{F}$, ותהי $T\colon V \to W$ העתקה לינארית כך ש-$T \neq 0$.

(א) הוכיחו כי קיים בסיס $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ של V כך ש-$Tv_i \neq 0$ לכל $1 \leq i \leq n$.

(ב) <u>הוכיחו או הפריכו:</u> קיימים וקטור $v \in V$ ובסיס סדור C של W שעבורם מתקיים $[Tv]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

פתרון.

(א) נתון כי $T \neq 0$, ולכן קיים $v_1 \notin \ker T$. נשלים אותו לבסיס $\{v_1, w_2, \dots, w_n\}$ של V (בפרט $n = \dim V$). נגדיר $v_2, \dots, v_n$ באופן הבא: לכל $1 \leq i \leq n$, אם $w_i \notin \ker T$ נגדיר $v_i = w_i$, ואחרת נגדיר $v_i = w_i + v_1$.
נוכיח כי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V. אכן, לכל $2 \leq i \leq n$ נכתוב $v_i = w_i + \alpha_i v_1$, כאשר $\alpha_i \in \{0, 1\}$. יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n = 0$$

נציב $v_i = w_i + \alpha_i v_1$ ונקבל

$$(\beta_1 + \beta_2\alpha_2 + \cdots + \beta_n\alpha_n)v_1 + \beta_2 w_2 + \cdots + \beta_n w_n = 0.$$

כיוון ש-$\{v_1, w_2, \dots, w_n\}$ בסיס של V, הווקטורים בו בת"ל, ולכן

$$\beta_1 + \beta_2\alpha_2 + \cdots + \beta_n\alpha_n = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$$

ומכאן נקבל גם $\beta_1 = 0$. בסך הכל B בת"ל, וכיוון שהיא מכילה n וקטורים ו-$n = \dim V$ נקבל מהשלישי חינם ש-B בסיס של V.
נשים לב כי לכל $1 \leq i \leq n$, $Tv_i \neq 0$. אכן, עבור $i = 1$ בחרנו את v_1 כך ש-$v_1 \notin \ker T$. עבור $2 \leq i \leq n$, נשים לב כי

$$Tv_i = T(w_i + \alpha_i v_1) = \begin{cases} Tw_i, & w_i \notin \ker T \\ T(w_i + v_1), & w_i \in \ker T \end{cases} = \begin{cases} Tw_i, & w_i \notin \ker T \\ Tv_1, & w_1 \in \ker T \end{cases} \neq 0.$$

הראינו ש-B מקיימת את הנדרש, ולכן הוכחנו את הטענה.

(ב) <u>הוכחה.</u> נוכיח את הטענה הבאה: לכל $0 \neq w \in W$ קיים בסיס C של W כך ש-$[w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. אז הסעיף יוכח אם ניקח $w = Tv$ עבור $v \notin \ker T$ (שקיים כי נתון ש-$T \neq 0$).
אכן, יהי $0 \neq w \in W$. נשלים אותו לבסיס $C_0 = \{w, w_2, \dots, w_m\}$ של W (בפרט $m = \dim W$). נגדיר קבוצה $C = \{w - w_2 - \cdots - w_m, w_2, \dots, w_m\}$, ונוכיח ש-$C$ בסיס של W.
נוכיח ראשית ש-C פורשת את W. ברור ש-$w_2, \dots, w_m \in \operatorname{Span}(C)$, ולכן גם $w = (w - w_2 - \cdots - w_m) + w_2 + \cdots + w_m \in \operatorname{Span}(C)$. זה מראה ש-$C_0 \subseteq \operatorname{Span}(C)$, לכן $W = \operatorname{Span}(C_0) \subseteq \operatorname{Span}(C) \subseteq W$, כלומר $\operatorname{Span}(C) = W$.

לכן C פורשת את W.
כיוון ש-$\dim W = m = |C|$, מהשלישי חינם נקבל ש-C בסיס של W.

כעת, $[w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, כי $w = (w - w_2 - \cdots - w_m) + w_2 + \cdots + w_m$. זה מוכיח את הסעיף.

5. (24 נק') יהיו V,W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T\colon V\to W$ העתקה לינארית.

(א) תהי $S\colon W\to V$ העתקה לינארית המקיימת $TST=T$. הוכיחו כי מתקיים $\ker S\cap \mathrm{Im}T=\{0_W\}$.

(ב) תהי $S\colon W\to V$ העתקה לינארית המקיימת $TST=T$. הוכיחו או הפריכו: $\ker S=\{0_W\}$.

(ג) הוכיחו כי קיימת העתקה לינארית $S\colon W\to V$ שעבורה $TST=T$.

פתרון.

(א) יהי $w\in\ker S\cap \mathrm{Im}T$. כיוון ש-$w\in \mathrm{Im}T$, קיים $v\in V$ כך ש-$w=Tv$. אבל $w\in\ker S$, לכן $STv=Sw=0$. מצד שני, לפי ההנחה מתקיים $TST=T$, ולכן $w=Tv=TSTv=T(STv)=T0=0$, כנדרש.

(ב) הפרכה. נגדיר $T,S\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ לפי $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$. אלו העתקות לינאריות, ומתקיים

$$TST\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=TS\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$$

לכל $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, כלומר $TST=T$. אבל

$$\ker S=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}\neq\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן הפרכנו את הסעיף.
גם $T=S=0$ (העתקות האפס) היא הפרכה לסעיף הזה, שהרי $TST=0=T$.

(ג) יהי $\{w_1,\dots,w_k\}$ בסיס ל-$\mathrm{Im}(T)$. נשלים אותו לבסיס $\{w_1,\dots,w_k,w_{k+1},\dots,w_m\}$ של W. לכל $1\le i\le k$, נבחר וקטור $v_i\in V$ כך ש-$Tv_i=w_i$ (קיים כזה כי $w_i\in\mathrm{Im}(T)$ לכל $1\le i\le k$). נגדיר העתקה לינארית $S\colon W\to V$ באופן הבא: לכל $1\le i\le k$ נגדיר $Sw_i=v_i$, ולכל $k+1\le i\le n$ נגדיר $Sw_i=0_V$. לפי משפט ההגדרה, קיימת העתקה לינארית $S\colon W\to V$ המקיימת את הדרישות האלו.
נותר להראות כי $TST=T$. אכן, יהי $v\in V$. כיוון ש-$\{w_1,\dots,w_k\}$ בסיס של $\mathrm{Im}(T)$, קיימים סקלרים $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{F}$ שעבורם $Tv=\alpha_1w_1+\dots+\alpha_kw_k$. לכן

$$\begin{aligned}TSTv&=TS(\alpha_1w_1+\cdots+\alpha_kw_k)=T(\alpha_1Sw_1+\cdots+\alpha_kSw_k)=T(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k)=\\&=\alpha_1Tv_1+\cdots+\alpha_kTv_k=\alpha_1w_1+\cdots+\alpha_kw_k=Tv\end{aligned}$$

זה מראה ש-$TSTv=Tv$ לכל $v\in V$, כלומר $TST=T$, כנדרש.